Obecný matematický základ

Tematické okruhy ke státní zkoušce KMA/OMZ

Uchazeč si vylosuje jeden z níže uvedených okruhů. Povinností je odpovídat na obě části okruhu, přičemž každé části je nutné věnovat alespoň 25 % času vyhrazeného jednomu předmětu SZZ. Pořadí částí okruhu není závazné. Cílem je souvislá prezentace daného tématu. Dílčí otázky by měly sloužit jako případná osnova, jakým směrem se může výklad ubírat. Není nutné vyčerpat všechna dílčí témata. Při hodnocení bude kladen důraz na matematickou kulturu prezentace, její relevantnost k tématu a porozumění hlavním pojmům a souvislostem.

1a **Diferenciální počet.**
Diferenciální počet funkce jedné proměnné, derivace a diferenciál. Vlastnosti diferencovatelných funkcí. Diferenciální počet funkcí dvou a více proměnných. Derivace ve směru, parciální derivace, gradient a totální diferenciál. Lokální extrémy.

1b **Elementární prostory v geometrii.**
Afinní a euklidovský bodový prostor. Projektivní rozšíření afinního a euklidovského prostoru. Projektivní prostor. Möbiův prostor. Grupy geometrických zobrazení. Axiomatická výstavba geometrie.

2a **Pojem integrálu.**
Primitivní funkce a neurčitý integrál, základní integrační techniky. Určitý integrál – Riemannův integrál funkce jedné proměnné, Newtonův-Leibnizův vzorec. Dvojný a trojný integrál, Fubiniova věta. Užití pro výpočty objemů a povrchů těles.

2b **Soustavy algebraických rovnic.**
Metody řešení soustav lineárních a nelineárních rovnic (přímé metody – např. Gaussova eliminace, iterační metody, gradientní metody).

3a **Řešení rovnice $f(x) = 0$.**
Kořeny rovnice, jejich existence a násobnost. Algebraické a transcendentní rovnice. Polynomy nad tělesem, kořeny polynomů, kanonické rozklady polynomů. Numerické metody řešení (např. prostá iterace, Newtonova metoda).

3b **Funkce komplexní proměnné.**
Komplexní čísla a komplexní funkce. Derivace komplexní funkce, Cauchyovy-Riemannovy podmínky a holomorfní funkce. Integrál komplexní funkce a rezidua.

4a **Lineární diferenciální rovnice.**
Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty. Charakteristická rovnice, fundamentální systém řešení. Partikulární řešení, metoda variace konstant, metoda odhadu. Počáteční a okrajové podmínky. Numerické metody.

4b **Statistické metody.**
Popisná statistika a zpracování dat. Statistické hypotézy a jejich testování, p-hodnoty testu. Hladina významnosti, testy nezávislosti. Interpretace statistických výsledků.

5a **Cauchyova úloha pro obyčejné diferenciální rovnice.**
ODR prvního řádu, Cauchyova úloha, geometrický význam, věta o lokální existenci a jednoznačnosti řešení, prodlužování řešení. Stabilita triviálního řešení soustavy lineárních rovnic. Bazény atrakce.

5b **Pravděpodobnost.**
Náhodný jev a jeho pravděpodobnost. Diskrétní a spojitá náhodná veličina. Rozdělení pravděpodobnosti, distribuční funkce, střední hodnota, rozptyl.

6a **Podmíněná a nepodmíněná optimalizace v $\mathbb{R}^N$.**
Úlohy na optimum, úlohy sedlového bodu, stacionární bod, lokální a globální extrémy, nutné a postačující podmínky řešitelnosti. Úlohy s vazbami typu rovnosti a nerovnosti, nutné a postačující podmínky řešilelnosti Lagrangeovy úlohy.

6b **Algebraické struktury.**
Algebraické struktury s jednou operací a se dvěma operacemi, algebraické struktury s uspořádáním (monoid, grupa, okruh, obor integrity, těleso, podílové těleso, svaz apod.). Budování číselných oborů.

7a **Funkční řady.**
Funkční řady. Bodová versus stejnoměrná konvergence funkčních řad. Mocninné řady, poloměr konvergence. Taylorovy a Fourierovy řady. Taylorův polynom, aproximace funkcí.

7b **Grafy.**
Neorientované a orientované grafy – základní pojmy, algebraický popis grafu. Eulerovské grafy, Hamiltonovské grafy. Barvení grafů.

8a **Lineární prostory.**
Lineární prostor nad tělesem, jeho vlastnosti, příklady. Báze a dimenze lineárního prostoru. Konečná versus nekonečná dimenze. Lineární zobrazení (matice, diferenciální operátory apod.). Vlastní čísla a vlastní vektory.

8b **Geometrie křivek a ploch.**
Typy popisu křivek a ploch. Frenetovy vzorce. První a druhá základní forma plochy – jejich vlastnosti a význam. Normálová, geodetická, hlavní, Gaussova a střední křivost. Rozvinutelné plochy, plochy s konstantní Gaussovou křivostí.