Obor Matematika – státní zkouška

Tematické okruhy ke státní zkoušce KMA/MSZ

Uchazeč si vylosuje jeden z níže uvedených okruhů. Cílem je souvislá prezentace daného tématu. Dílčí otázky by měly sloužit jako případná osnova, jakým směrem se může výklad ubírat. Není nutné vyčerpat všechna dílčí témata. Při hodnocení bude kladen důraz na matematickou kulturu prezentace, její relevantnost k tématu a porozumění hlavním pojmům a souvislostem.

MSZ 1

Uvažme množinu všech přirozených čísel ω a množinu všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$ v rámci Zermelo–Fraenkelovy teorie množin.

- Uveďte definici množin ω a $\mathbb{Q}$. Jak jsou na těchto množinách definovány aritmetické operace $+$ a $\cdot$?
- Porovnejte struktury $(\omega, +, \cdot)$ a $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ z hlediska algebraických vlastností. Připomeňte pojmy *grupa*, *okruh* a *těleso*.
- Jak je v Zermelo–Fraenkelově teorii množin definována množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$? Vysvětlete pojem *řez*.
- Definujte pojem *konečná* a *spočetná* množina. Rozhodněte, zda je množina $\mathbb{Q}$ resp. množina $\mathbb{R}$ spočetná, a pro svá tvrzení uveďte nástin důkazu.
- Vysvětlete, jak souvisí pojem konečná množina s kompaktními metrickými prostory a s větou o kompaktnosti pro výrokovou logiku.
- Uveďte příklad tělesa konečné mohutnosti. Jaké jsou možné počty prvků takového tělesa?

Pokrytí látky:
Zermelo–Fraenkelova teorie množin, konstrukce číselných množin (racionální a reálná čísla), mohutnost množin, konečné a spočetné množiny, Cantorova věta o mohutnosti, základní algebraické struktury, konečná tělesa, kompaktnost v teorii metrických prostorů a v logice.

MSZ 2

Je dána okrajová úloha

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \qquad \text{v } \Omega, \\ u &= g \qquad \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

kde Ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^N$.

- Vysvětlete fyzikální význam úlohy (1) a její souvislost s úlohami pro vlnovou a difuzní rovnici. Uveďte, jakého typu je příslušná parciální diferenciální rovnice. Vysvětlete pojem harmonické funkce.
- Vysvětlete, co je klasické řešení úlohy (1), za jakých podmínek toto řešení existuje a kolik jich je.
- Uveďte základní vlastnost řešení úlohy (1), pokud $f \equiv 0$.
- Vysvětlete, jak lze toto řešení nalézt v případě, že $N = 2$, $\Omega = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ nebo $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$.

Pokrytí látky:
Laplaceova a Poissonova rovnice, vlnová rovnice, difuzní rovnice. Harmonické funkce. Klasické řešení okrajové úlohy. Princip maxima. Fourierova metoda, Fourierovy řady a jejich konvergence. Poissonova formule, věta o reprezentaci, věta o průměru, Greenova funkce.

MSZ 3

Nechť (X, S, μ) je prostor s mírou, $D \in S$ a f je μ-měřitelná funkce na D. Uvažujte Lebesgueův integrál

$$\int_D f \mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

- Vysvětlete pojmy míra, γ-měřitelná množina, σ-algebra a uveďte příklady měr.
- Vysvětlete pojem měřitelná funkce a definujte abstraktní Lebesgueův integrál.
- Vysvětlete vztah mezi Newtonovým, Riemannovým a Lebesgueovým integrálem v $\mathbb{R}$. Vysvětlete pojem absolutně spojitá funkce.
- Vyslovte větu o monotónní konvergenci a Lebesgueovu větu o dominantní konvergenci a vysvětlete rozdíly v jejich použití.

Pokrytí látky:
vnější míra, míra, γ-měřitelné množiny, základní konstrukce míry, měřitelná funkce, abstraktní Lebesgueův integrál, Newtonův, Riemannův a Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}$, absolutní spojitost, konvergenční věty, Lebesgueovy funkční prostory, Fourierovy řady.

MSZ 4

Je dána okrajová úloha

$$\begin{cases} -u'' = f \quad x \in (a,b), \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \end{cases} \tag{3}$$

- Uveďte alespoň jeden příklad matematického modelu, jehož je (3) základem.
- Popište aplikaci metody konečných diferencí na úlohu (3).
- Definujte pojmy konzistence, stabilita a konvergence. Popište jejich vzájemnou souvislost. Zdůvodněte, zda je zvolená metoda stabilní.
- Popište, jak lze aproximovat Neumannovu okrajovou podmínku. Posuďte korektnost úloh s různými okrajovými podmínkami.
- Popište vlastnosti získané soustavy lineárních algebraických rovnic a navrhněte vhodnou metodu pro její řešení. Posuďte podmíněnost této úlohy.

Pokrytí látky:
Okrajové úlohy pro ODR, metoda konečných diferencí, metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic.

MSZ 5

Je dána okrajová úloha

$$\begin{cases} -u'' = f \quad x \in (a,b), \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \end{cases} \tag{4}$$

- Uveďte alespoň jeden příklad matematického modelu, jehož je (4) základem.
- Vysvětlete princip Galerkinovy a Ritzovy metody. Vysvětlete, z jaké formulace v rámci této metody vycházíme.
- Popište aplikaci metody konečných prvků na úlohu (4).
- Popište, jakým způsobem se v rámci metody konečných prvků implementují různé typy okrajových podmínek.
- Popište vlastnosti získané soustavy lineárních algebraických rovnic a navrhněte vhodnou metodu pro její řešení.

Pokrytí látky:
Okrajové úlohy pro ODR, metoda konečných prvků, metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic.

MSZ 6

Uvažujme geometrii v Kleinově smyslu jakožto dvojici (S, G), kde S je neprázdná bodová množina a G je grupa geometrických transformací, která operuje na množině S.

- Zaveďte projektivní geometrii volbou projektivního prostoru $\mathbb{P}_n$ za výše uvedenou bodovou množinu S, na kterou působí projektivní grupa PGL_n, a popište charakteristické vlastnosti (invarianty) projektivní geometrie.
- Pomocí grupového přístupu proveďte klasifikaci jednotlivých geometrií a ukažte jejich vzájemné vztahy a souvislosti.
- Projektivní transformace na $\mathbb{P}_n$ je dána třídou ekvivalentních matic reprezentovanou regulární maticí $\mathbf{A}_{(n+1,n+1)}$. Diskutujte, kdy jde o afinní kolineace projektivního prostoru.
- Vysvětlete pojem absolutní kvadrika (specifikujte např. v $\mathbb{E}_2$) a zaveďte Cayley–Kleinovu metriku v projektivním prostoru.

Pokrytí látky:
Projektivní prostor a jeho podprostory. Grupy geometrických transformací. Projektivní, afinní a metrické vlastnosti kvadrik. Felix Klein: Erlangenský program.

MSZ 7

Uvažujme horní polorovinný model hyperbolické geometrie

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \, \Im(z) > 0\} \, .$$

- Zaveďte Riemannovu sféru $\overline{\mathbb{C}}$, uveďte její vlastnosti a popište množinu meromorfních funkcí na Riemannově sféře. Identifikujte podgrupu automorfismů $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$.
- Popište polorovinný model hyperbolické geometrie a identifikujte $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ jakožto podgrupu Möbiovy grupy.
- Srovnejte vlastnosti hyperbolické a euklidovské geometrie.
- Jak je zavedena metrika na $\mathbb{H}$ a jaký je její vztah k $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$? Popište geodetiky v modelu $\mathbb{H}$.

Pokrytí látky:
Základy komplexní analýzy. Möbiova geometrie, Möbiovy transformace. Hyperbolická geometrie, hyperbolická metrika. Neeukleidovské geometrie.

MSZ 8

Je dána úloha lineárního programování (LP) ve tvaru

$$\left\{\begin{array}{l} \min\ \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ x_i \geq 0 \end{array}\right. \tag{5}$$

kde $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m,n}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$, a $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$.

- Vysvětlete pojem přípustného bazického řešení úlohy LP a princip simplexového algoritmu.
- Vysvětlete třídy úloh P, NP a NPC, a klasifikujte z hlediska výpočetní složitosti
  - úlohu LP ve tvaru (1), tj. v reálném oboru,
  - příslušnou úlohu celočíselného lineárního programování (CLP), tj. úlohu (1) s dodatečnou podmínkou celočíselnosti matice $\mathbf{A}$ a vektorů $\mathbf{b}$ a $\mathbf{x}$.
- Vysvětlete pojem dobré charakteristiky a ukažte, že úloha (1) je dobře charakterizovaná.
- Uveďte podmínky, za nichž je řešení celočíselné verze úlohy (1) možno nalézt v polynomiálním čase.
- Vysvětlete použití úlohy (1) a příslušné úlohy CLP pro řešení optimalizačních úloh na grafech a sítích, včetně příslušných převodů.

Pokrytí látky:
Lineární programování reálné a celočíselné, výpočetní složitost (polynomiální, NP-úplné a NP-těžké úlohy, dobré charakteristiky), toky v sítích (optimální a maximální tok), základní optimalizační grafové úlohy (metrika, míry souvislosti, párování v bipartitních grafech).
