

Matematická a numerická analýza - SZZ

Tematické okruhy ke státní zkoušce KMA/MNA

Uchazeč si vylosuje jeden z níže uvedených okruhů. Povinností je odpovídat na obě části okruhu, přičemž každé části je nutné věnovat alespoň 25 % času vyhrazeného jednomu předmětu SZZ. Pořadí částí okruhu není závazné. Cílem je souvislá prezentace daného tématu. Dílčí otázky by měly sloužit jako případná osnova, jakým směrem se může výklad ubírat. Není nutné vyčerpat všechna dílčí témata. Při hodnocení bude kladen důraz na matematickou kulturu prezentace, její relevantnost k tématu a porozumění hlavním pojmům a souvislostem.

1a **Transportní rovnice.**

Formulace úlohy, fyzikální interpretace, tvar řešení, pojem postupné vlny, geometrická metoda, charakteristiky, souřadnicové metody.

1b **Numerické metody pro parciální diferenciální rovnice hyperbolického typu.**

Základní diferenční metody pro rovnice s konstantními koeficienty, konzistence, stabilita, CFL podmínka. Metoda konečných objemů, metody Godunova typu.

2a **Operátory a operátorové rovnice.**

Lineární operátory, spojitost, omezenost, kompaktní operátor, pevný bod operátoru. Operátorové rovnice, Banachova věta o kontrakci, věta o neexpanzivním zobrazení, Brouwerova věta, Schauderova věta. Rozdíl mezi konečnou a nekonečnou dimenzí, Kakutaniho protipříklad, kompaktní perturbace identity.

2b **Iterační metody pro nelineární rovnice a jejich soustavy.**

Metoda bisekce. Metoda prosté iterace, podmínky konvergence, odhad chyby, rychlost konvergence. Newtonova metoda, její modifikace a konvergence.

3a **Vlnová rovnice v jedné dimenzi.**

Formulace úlohy, fyzikální interpretace, d'Alembertův tvar řešení, charakteristiky, princip kauzality, oblast vlivu a závislosti, zákon zachování energie a jeho důsledky. Počátečně-okrajové úlohy na intervalu.

3b **Přímé metody pro řešení soustav lineárních algebraických rovnic.**

Přímé metody pro řešení soustav lineárních algebraických rovnic. Základní maticové rozklady. Existence a jednoznačnost trojúhelníkového rozkladu. Podmíněnost a stabilita trojúhelníkového rozkladu. Choleského rozklad, princip neúplné faktorizace.

4a **Difuzní rovnice a rovnice vedení tepla v jedné dimenzi.**

Formulace úlohy, fyzikální interpretace, tvar řešení, difuzní jádro. Počátečně okrajové úlohy na intervalu. Princip maxima a jeho důsledky (jednoznačnost, stabilita řešení).

4b **Numerické metody pro počátečně-okrajové úlohy rovnice parabolického typu.**

Explicitní a implicitní diferenční metody. Konzistence, stabilita, konvergence diferenčních metod. Souvislost diferenčních metod s metodami pro stiff soustavy obyčejných diferenciálních rovnic.

5a **Počátečně-okrajové úlohy pro parciální diferenciální rovnice.**

Formulace úlohy, základní typy okrajových podmínek a jejich fyzikální význam, metoda odrazu, Fourierova metoda, metody integrálních transformací.

5b **Numerické metody pro počáteční úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice.**

Počáteční úloha pro obyčejné diferenciální rovnice. Metody Taylorova typu. Lokální a globální diskretizační chyba. Explicitní a implicitní metody, jednokrokové a vícekové metody. Algoritmy typu prediktor-korektor. Stabilita, stiff systémy. Využití extrapolace pro odhad chyby metodou polovičního kroku a pro metody zpřesňování. Adaptivní techniky.

6a **Spektrum lineárního operátoru.**

Rezolventní množina, spektrum, druhy spektra, vlastní číslo, spektrum kompaktního lineárního operátoru, Fredholmova alternativa. Příklady.

6b **Numerické metody pro řešení úloh na vlastní čísla.**

Úloha na vlastní čísla. Mocninná metoda, metoda Rayleighova podílu, metoda LU-rozkladu, Metody ortogonálních transformací, Jacobiova diagonalizace, Givenssonova transformace.

7a **Stupeň zobrazení.**

Konstrukce Brouwerova stupně zobrazení, základní předpoklady a aplikace. Konstrukce Lera-Schauderova stupně zobrazení, aplikace. Rozdíl mezi konečnou a nekonečnou dimenzí.

7b **Aproximace funkcí.**

Základní aproximační úlohy. Aproximace Taylorovým polynomem, diskrétní a spojitá L2 aproximace. Interpolace a extrapolace. Čebyševova aproximace. Diskrétní Fourierova transformace.

8a **Sedlové body v nekonečné dimenzi.**

Princip minimaxu v nekonečné dimenzi, deformační lemma, Palais-Smaleova podmínka, geometrie typu Mountain Pass a typu sedlový bod.

8b **Metody pro soustavy lineárních algebraických rovnic se speciální maticí.**

Metody pro soustavy lineárních algebraických rovnic se speciální maticí. Přímé a iterační metody. Stacionární a nestacionární metody. Gradientní metody. Metoda největšího spádu a její konvergence. Metoda sdružených gradientů a její konvergence.