

Geometrie a geometrické modelování – SZZ

Tématické okruhy ke státní zkoušce z předmětu KMA/AGO

Uchazeč si vylosuje jeden z níže uvedených okruhů. Povinností je odpovídat na obě části okruhu, přičemž každé části je nutné věnovat alespoň 25 % času vyhrazeného jednomu předmětu SZZ. Pořadí částí okruhu není závazné. Cílem je souvislá prezentace daného tématu. Dílčí otázky by měly sloužit jako případná osnova, jakým směrem se může výklad ubírat. Není nutné vyčerpat všechna dílčí témata. Při hodnocení bude kladen důraz na matematickou kulturu prezentace, její relevantnost k tématu a porozumění hlavním pojmům a souvislostem.

1a Základy afinní a eukleidovské geometrie.

Podprostory afinního a eukleidovského prostoru – jejich popis a vzájemná poloha. Afinní repér. Lineární kombinace bodů, barycentrické souřadnice. Podmnožiny afinních a eukleidovských podprostorů. Základní metrické úlohy v eukleidovském prostoru.

1b Polynomy více proměnných a Gröbnerovy báze.

Monomické ideály, Dicksonovo lemma. Uspořádání monomů a dělení polynomů. Gröbnerova báze ideálu, Hilbertova věta o bázi. Vlastnosti Gröbnerových bází a Buchbergerův algoritmus. Minimální a redukované Gröbnerovy báze.

2a Základy projektivní geometrie.

Projektivní prostor a jeho podprostory – definice, základní vlastnosti. Projektivní soustava souřadnic, projektivní repér. Princip duality a věty duální. Dvojpoměr bodů a nadrovin. Přechod od projektivního prostoru k afinnímu prostoru.

2b Křivky v geometrickém modelování.

Spline křivky, Bézierovy křivky, racionální Bézierovy křivky, B-spline křivky, NURBS křivky – definice, vlastnosti, geometrický význam váhy vrcholu řídicího polygonu, vztahy mezi jednotlivými typy křivek. Algoritmy konstrukce. Afinní a projektivní invariantnost. Vztah Fergusonovy kubiky a Bézierových křivek.

3a Afinní variety a lokální vlastnosti.

Afinní varieta, Zariského topologie, morfismus, dimenze, ireducibilita. Souřadnicový okruh variety, Hilbertova Nullstellensatz a vztah mezi algebrou a geometrií. Lokální vlastnosti variet, tečný prostor, hladké body.

3b Subdivision křivky a plochy.

Subdivision schémata – motivace pro zavedení, základní vlastnosti. Subdivision schémata pro křivky – interpolační schémata, aproximační schémata a jejich vztah k B-spline křivkám. Subdivision pro plochy – interpolační a aproximační schémata pro trojúhelníkové a čtyřúhelníkové sítě.

4a Neeukleidovské geometrie.

Srovnání Eukleidovské hyperbolické a eliptické geometrie. Modely hyperbolické geometrie, metrika, geodetiky, izometrie. Souvislost typu geometrie a Gaussovo křivosti. Vlastnosti hyperbolické geometrie – součet úhlů v trojúhelníku, Schweikartova konstanta, Pythagorova věta.

4b Plochy v geometrickém modelování.

Spline plochy, Bézierovy plochy, racionální Bézierovy plochy, B-spline plochy, NURBS plochy – definice, vlastnosti, vztahy mezi jednotlivými typy ploch, algoritmy konstrukce. Plátování a Coonsovy pláty. Barycentrické souřadnice a trojúhelníkové pláty.

5a Projektivní variety

Projektivní varieta, její homogenní ideál, homogenní Nullstellensatz a projektivní uzávěry afinní variety. Morfizmy projektivních variet, Segreho zobrazení a kartézský součin projektivních variet. Dimenze a stupeň variety, Hilbertova funkce, Hilbertův polynom a význam jeho vedoucího koeficientu.

5b Voroného diagramy a Delaunayho triangulace.

Voroného diagramy – definice, vlastnosti. Algoritmy konstrukce Voroného diagramu a jejich složitost. Delaunayho triangulace – optimalita triangulace, počty existujících triangulací (Catalanovo číslo), vlastnosti a jedinečnost Delaunayovy triangulace. Zobecněné Voroného diagramy pro různé metriky, aplikace.

6a Rovinné a prostorové křivky.

Parametrizace obloukem. Frenetův repér pro roviné a prostorové křivky. Křivost a znaménková křivost, torze. Přirozené rovnice křivky, křivky s konstantním spádem. Jordanova křivka. Rotační index. Oblast plochy omezená křivkou.

6b Teorie eliminací a aplikace Gröbnerovýchází.

Eliminace proměnných – věta o eliminaci a věta o uzávěru. Řešitelnost soustavy polynomiálních rovnic. Implicitizace polynomiálních a racionálních parametrizací. Příslušnost polynomu k ideálu a rovnost ideálů. Automatické dokazování.

7a Kvadriky v projektivním, afinním a eukleidovském prostoru

Pojem polární sdruženosti, pól a polární nadrovina, von Staudtova věta. Tečna, tečná nadrovina. Věta o tvořících podprostorech. Střed, průměrové a asymptotické nadroviny, hlavní směry a osové nadroviny kvadriky. Souvislost klasifikací s grupami geometrických zobrazení.

7b Vybrané geometrické operace a jejich uzavřenost

Teorie konvolucí a ofsetů – klasický a zobecněný offset, třídy racionálních křivek a ploch s racionálním klasickým nebo zobecněným ofsetem, aplikace. Polynomiální a racionální PH křivky, PN plochy, jejich zavedení, vlastnosti, aplikace. Interpolace, aproximace.

8a **Grupy geometrických zobrazení.**

Projektivní, afinní, shodná a podobná zobrazení – definice, základní vlastnosti, invarianty. Věty o určenosti, maticová vyjádření, vyšetřování samodružných útvarů (bodů, směrů, nadrovin), klasifikace. Grupy geometrických transformací. Věta o rozkladu obecné afinity na základní afinity. Středová kolineace a její typy s ohledem na charakter určujících prvků.

8b **Diferenciální geometrie ploch.**

Vnitřní geometrie plochy. Izometrie, konformní a plochojevné zobrazení. Délka křivky na ploše, úhel mezi křivkami na ploše, plošný obsah části plochy. Gaussovo a Weingartenovo zobrazení. Hlavní směry a křivosti plochy. Geodetiky. Clairautova věta. Nejkratší spojnice bodů na ploše.