Jak zpívají křivky

Světlana Tomiczková

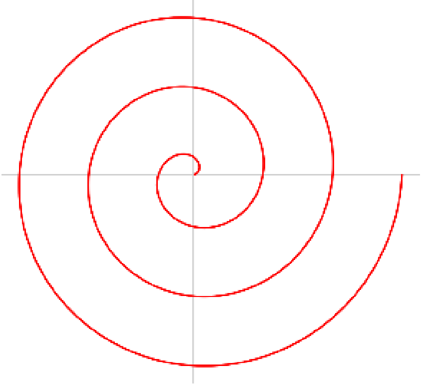
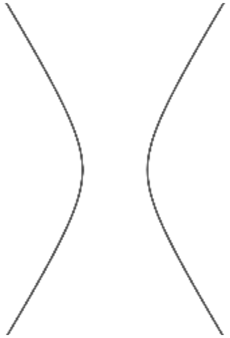
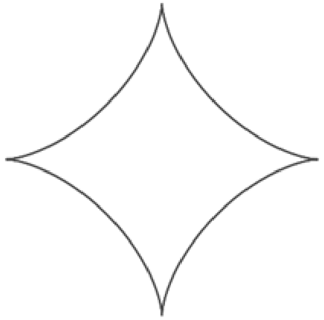
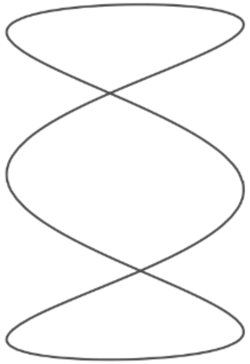
Eukleides (23 definic, 5 postulátů, 9 axiomů)

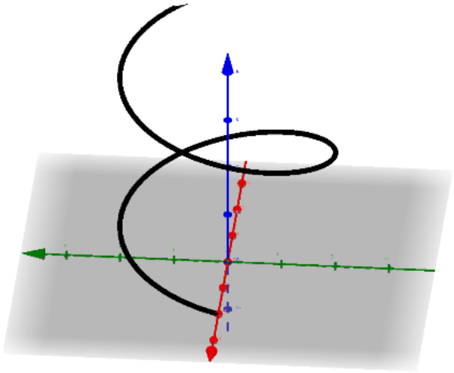
- Bod jest, co nemá dílu
- ***Čára* je délka bez šířky**
- *Úhel* je vzájemný sklon dvou čar.
- *Mez* je to, co je něčeho hranicí
- *Kruh* je rovinný útvar ohraničený **jednou čarou** (nazývanou *kružnice*), a to tak, že všechny úsečky, které jsou k ní vedeny z jednoho bodu, se navzájem rovnají.
- …
- *Rovnoběžky* jsou takové úsečky, které leží v téže rovině a jejichž jakákoliv prodloužení se neprotínají.

Co je křivka? Jaké známe křivky?

- Kružnice
- Přímka
- Elipsa
- Hyperbola
- Parabola
- …

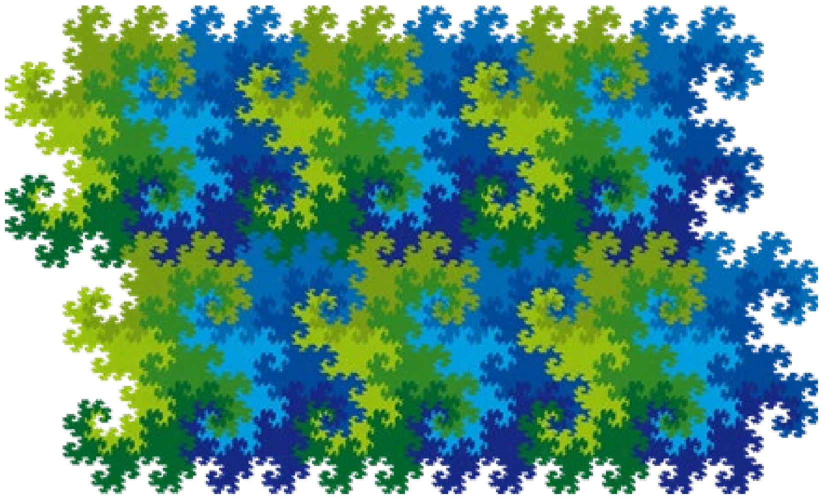
Co je křivka?

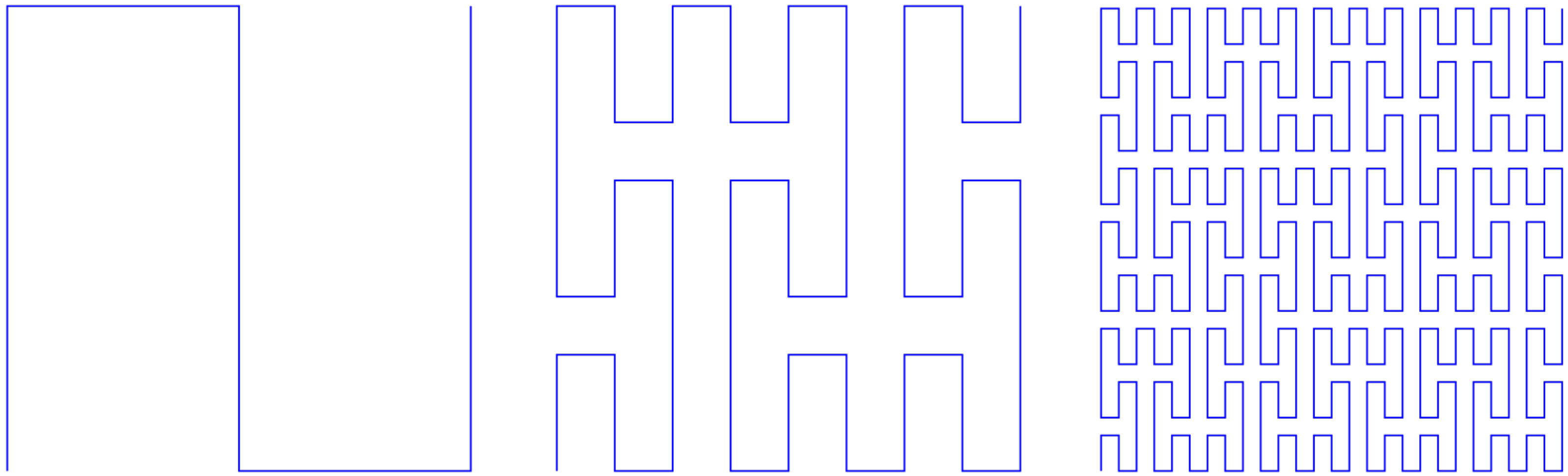


Křivka je dráha pohybujícího se bodu

Co je křivka?



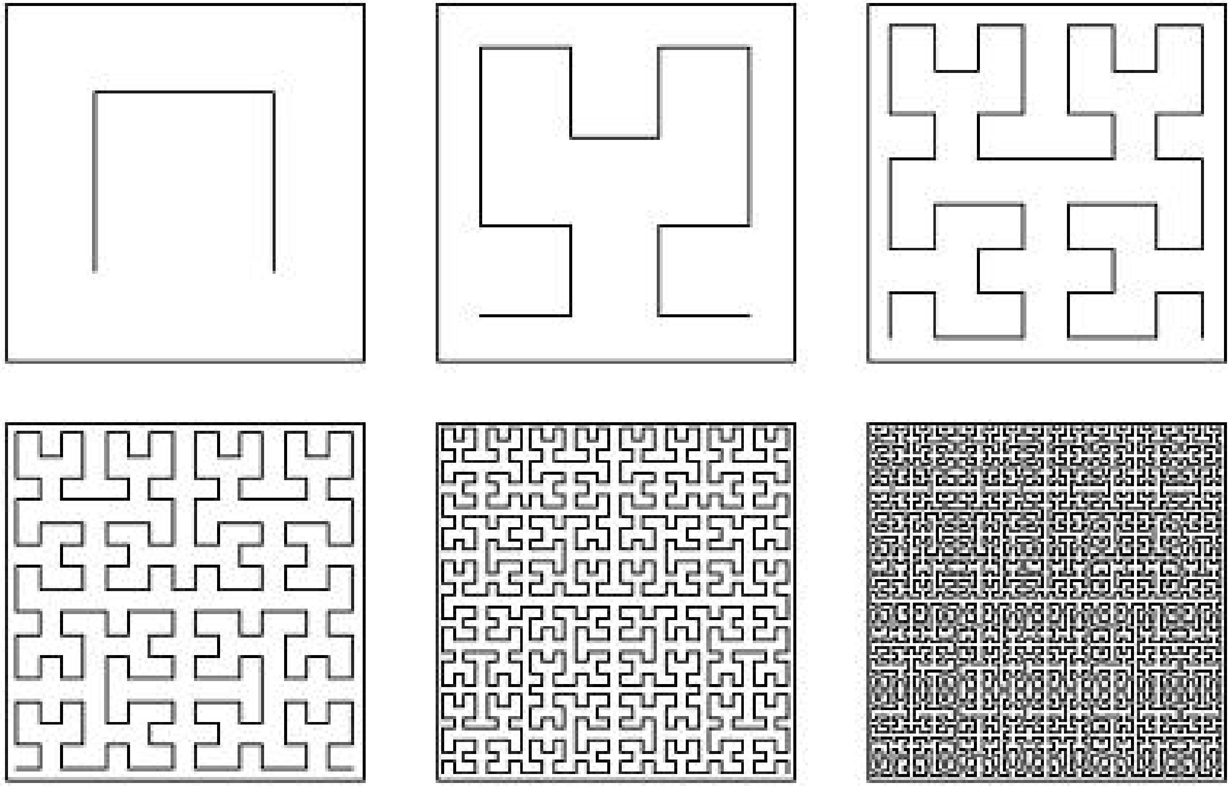
Peanovy křivky



nevyplňuje prostor neomezeně, ale daný první iterací
nikde se neprotíná
je soběpodobná, invariantní vůči měřítku
v klasické verzi je bodově symetrická podle svého středu
s každou iterací roste počet nových podsegmentů devítinásobně (3×3)

italský matematik Giuseppe Peano (1858–1932) v roce 1890

Hilbertova křivka



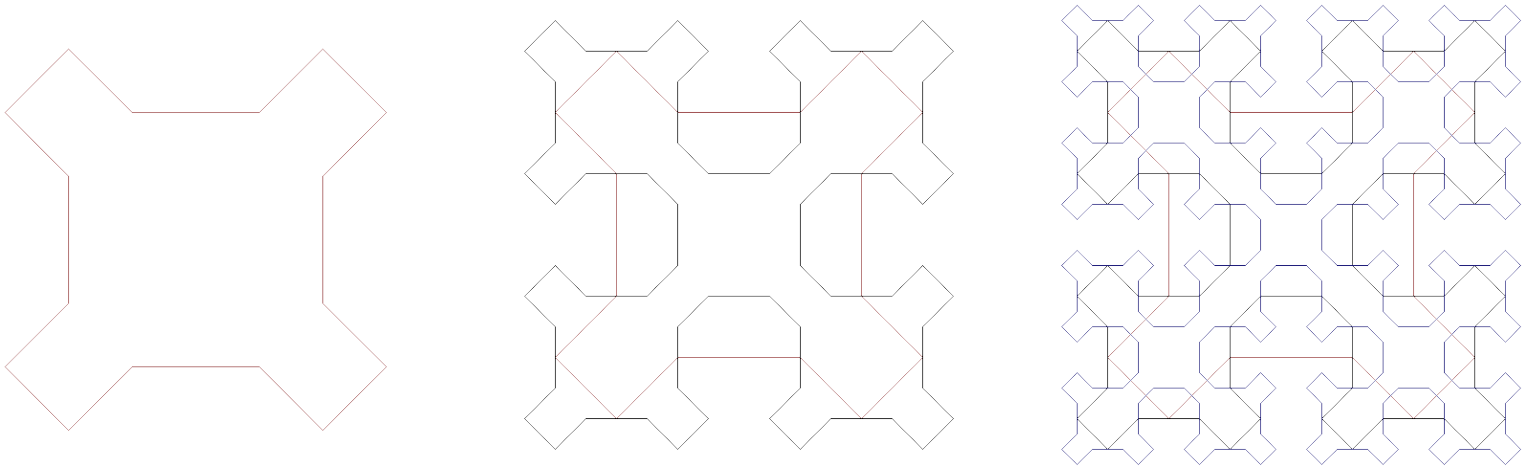
David Hilbert (23. ledna 1862 Wehlau (dnes Znamensk), Východní Prusko – 14. února 1943 Göttingen, Německo)

David Hilbert (1862–1943)

- **Hilbertův program je** snaha německého matematika Davida Hilberta o formalizaci matematiky až na úroveň jednoduchých axiomů, ze kterých by se daly korektně dokázat všechny matematické věty.
- Seznam **23 takzvaných Hilbertových problémů** předložil David Hilbert v roce 1900 ve své přednášce Problémy matematiky na 2. mezinárodním kongresu matematiků v Paříži.

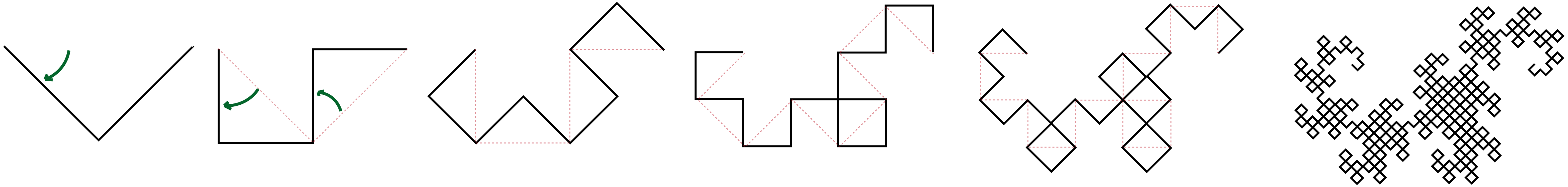
- 7 problémů tisíciletí
- v roce 2000 vyhlásil Clayův matematický institut jako nejdůležitější otevřené problémy soudobé matematiky.
- vyřešena pouze Poincarého domněnka.
- Zůstává Riemannova hypotéza

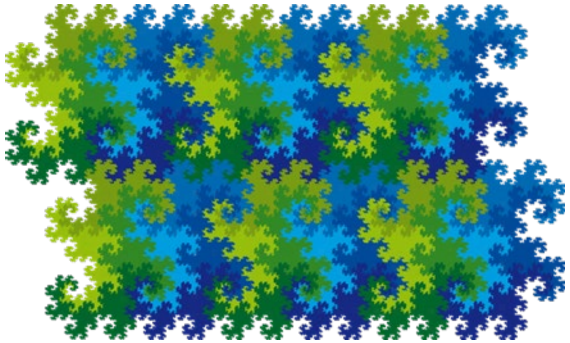
Sierpinského křivka



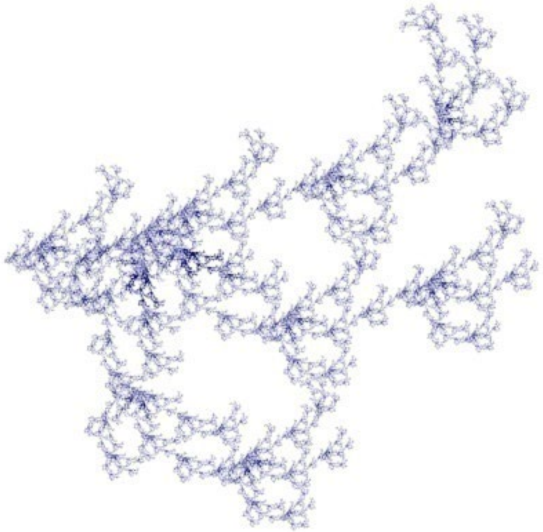
Wacław Franciszek Sierpiński (14. března 1882, Varšava — 21. října 1969, Varšava)

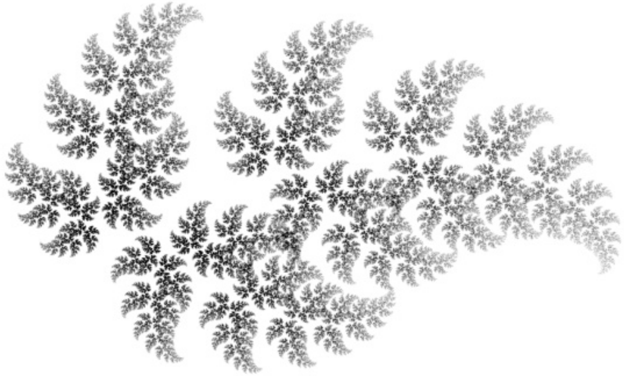
Dračí křivka





L systémy





L-systém nebo také Lindenmayerův systém je varianta formální gramatiky, vyvinutá pro modelování růstu rostlin.

L-systémy byly vyvinuty v roce 1968 maďarským biologem Aristidem Lindenmayerem jako matematický formalizmus pro popisování růstu řas. Symboly představovaly jednotlivé buňky a přepisovací pravidla L-systému simulovaly jejich dělení. Později polský informatik Przemyslaw Prusinkiewicz interpretoval symboly L-systémů pomocí želví grafiky (tedy symboly představovaly grafické elementy jako např. úsečky). Touto metodou se již dalo modelovat širší spektrum rostlin a různé fraktálové křivky.

Ve filmu Avatar z roku 2009 bylo přes 2000 stromů, rostlin a kapradin vymodelováno právě pomocí L-systémů.

Různé definice

Wikipedie

Křivka je v matematice geometrický jednorozměrný objekt, případně zobrazení z přímky do nějakého prostoru (tzv. parametrizovaná křivka). Jednoduché příklady křivek jsou přímka nebo kružnice.

Je-li M nějaký matematický prostor (například Eukleidovský prostor, varieta, topologický prostor) a I interval reálných čísel, pak křivkou k k rozumíme spojité zobrazení I do M.

Definice

Regulární křivkou třídy C_n v $\mathbb{E}_3$ rozumíme množinu $\mathcal{K} \in \mathbb{E}_3$, pro níž existuje vektorová funkce $\boldsymbol{P}(t)$, $t \in \mathcal{J}$ tak, že

1. $\boldsymbol{P} : \mathcal{J} \to \mathcal{K}$, $\mathcal{J}$ je otevřený interval,
2. $\boldsymbol{P}$ je třídy C_n,
3. $|\boldsymbol{P}'(t_0)| \neq 0$ pro všechna $t_0 \in \mathcal{J}$,
4. $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \boldsymbol{P}(t_1) \neq \boldsymbol{P}(t_2)$.

Křivka je množina (bodů), která je až na konečný počet bodů regulární křivkou.

Někdy se slovem křivka myslí jenom její obraz křivky

Co nás o křivce zajímá

- Jak ji popsat
- Délka
- Jak je „křivá“
- Způsob vzniku, jak ji vytvoříme
- K čemu je dobrá (existuje aplikace nebo jev, kde ji najdeme?)

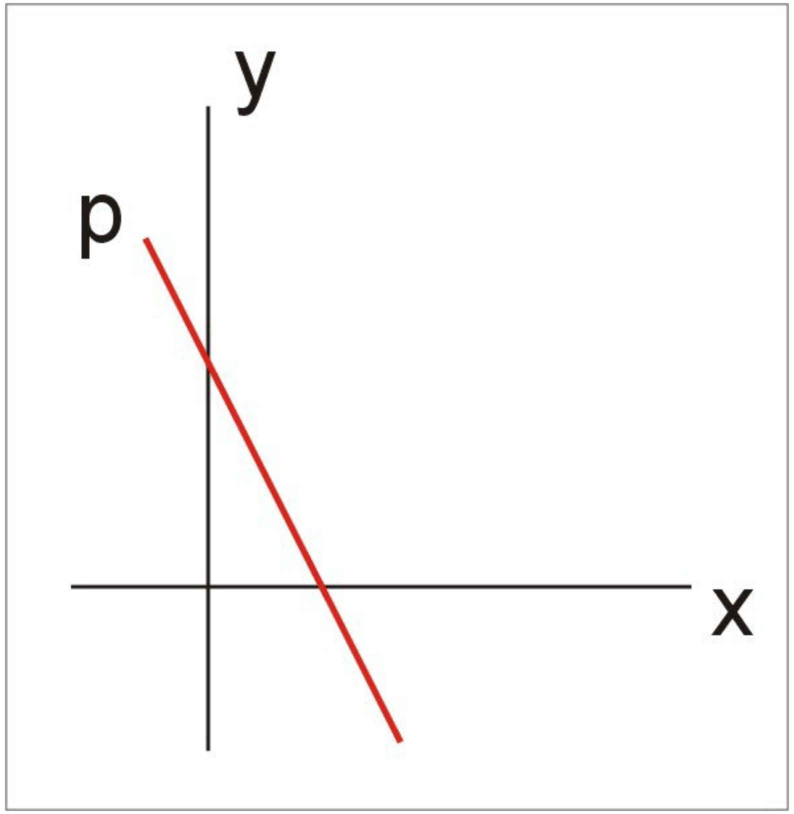
Jak křivku popsat (matematicky)?

René Descartes

Pierre Fermat

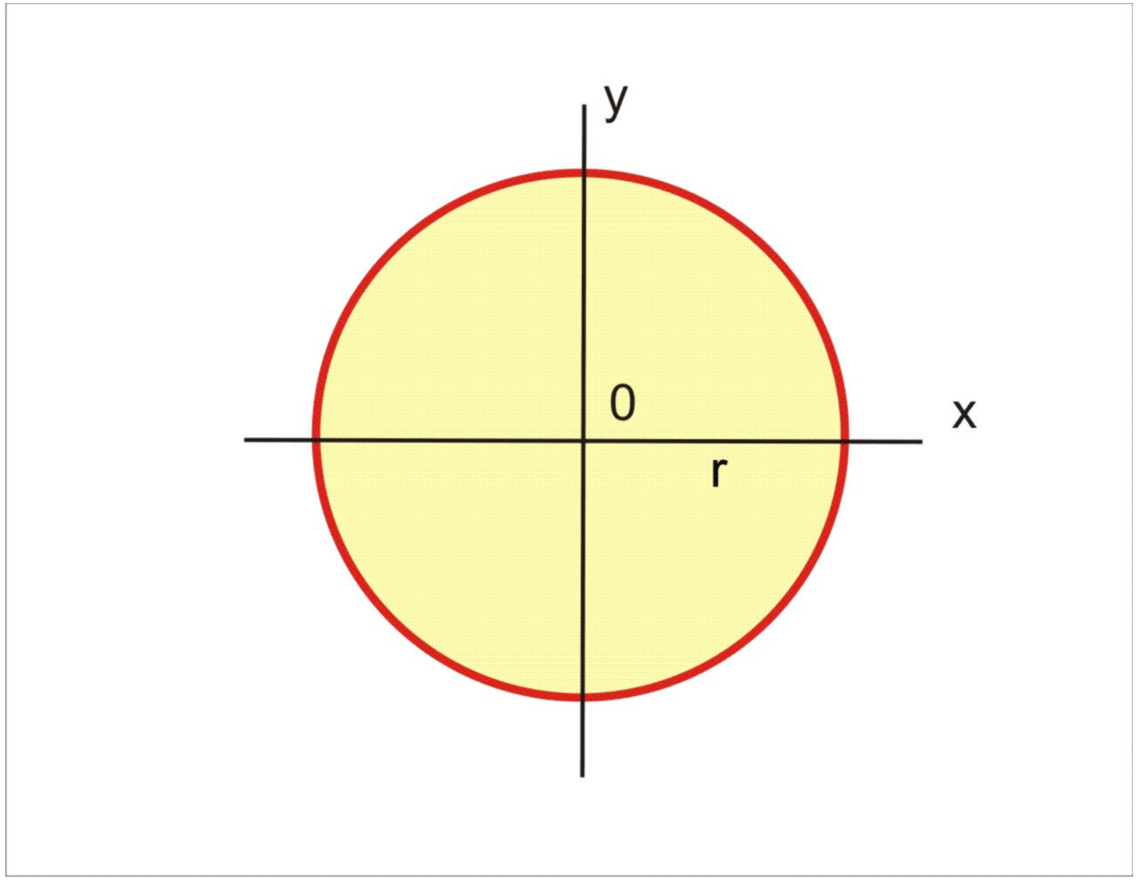
Fermat a René Descartes vytvořili analytickou geometrii nezávisle a prakticky zároveň, ale protože Fermat své výsledky málokdy publikoval, přišel o prvenství. 17. století

Jak popsat křivku (matematicky) ve 2D?



- $2x + y = 2$
- $y = -2x + 2$
- $x = 1 - t,$
  $y = 2t, \qquad t \in \mathbb{R}$
- $P(t) = (1 - t, 2t), t \in \mathbb{R}$

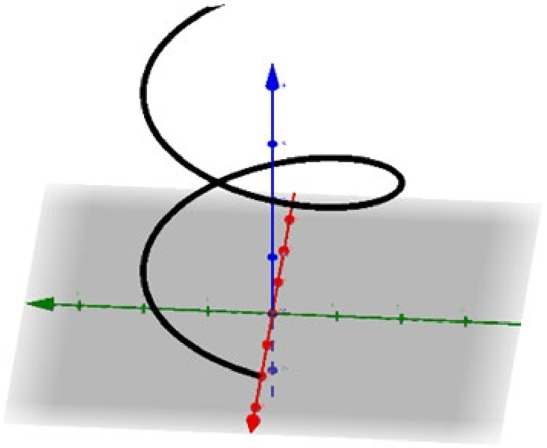
Jak křivku popsat (matematicky)?



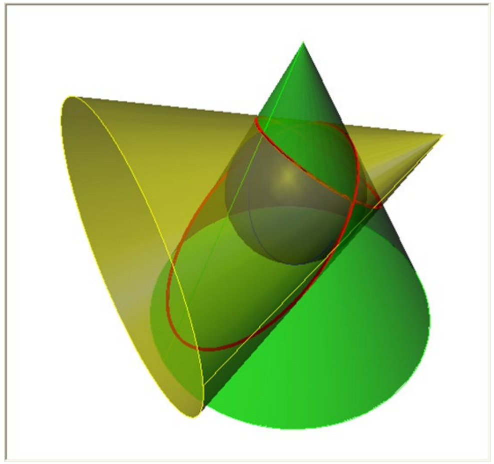
- $x^2 + y^2 = r^2$
- $x = r\cos t,$
  $y = r\sin t, \qquad t \in \mathbb{R}$
- $P(t) = (r\cos t, r\sin t), t \in \mathbb{R}$

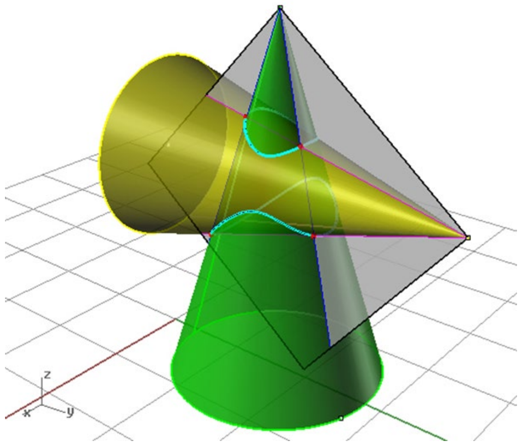
Jak popsat křivku (matematicky) ve 3D?

Parametricky



Přímka jako průnik dvou rovin
Kružnice průnik roviny s válcovou plochou

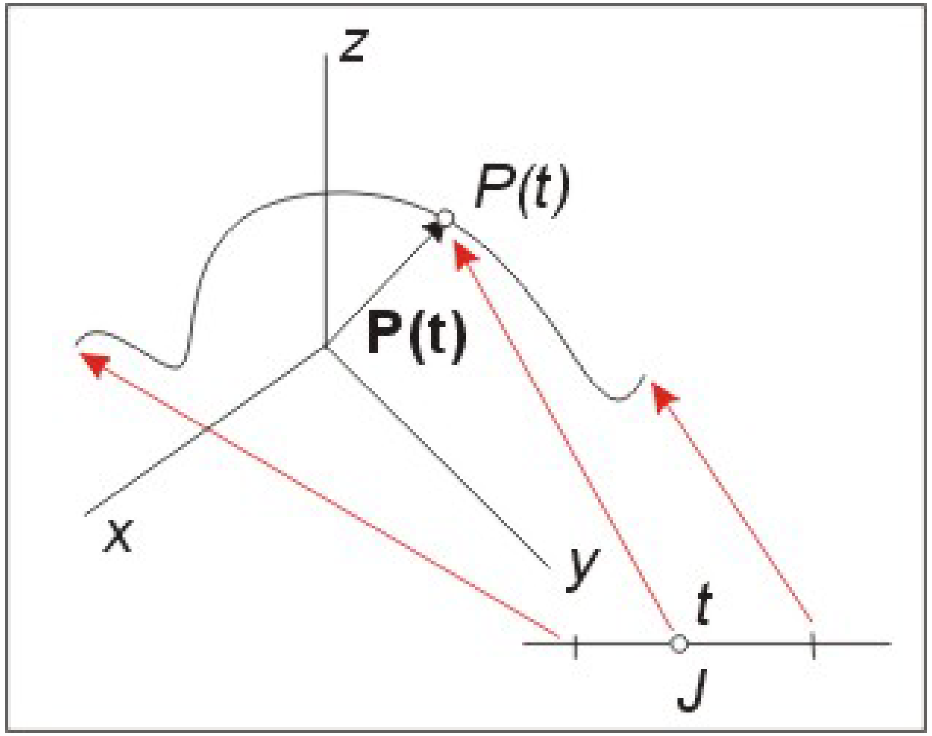


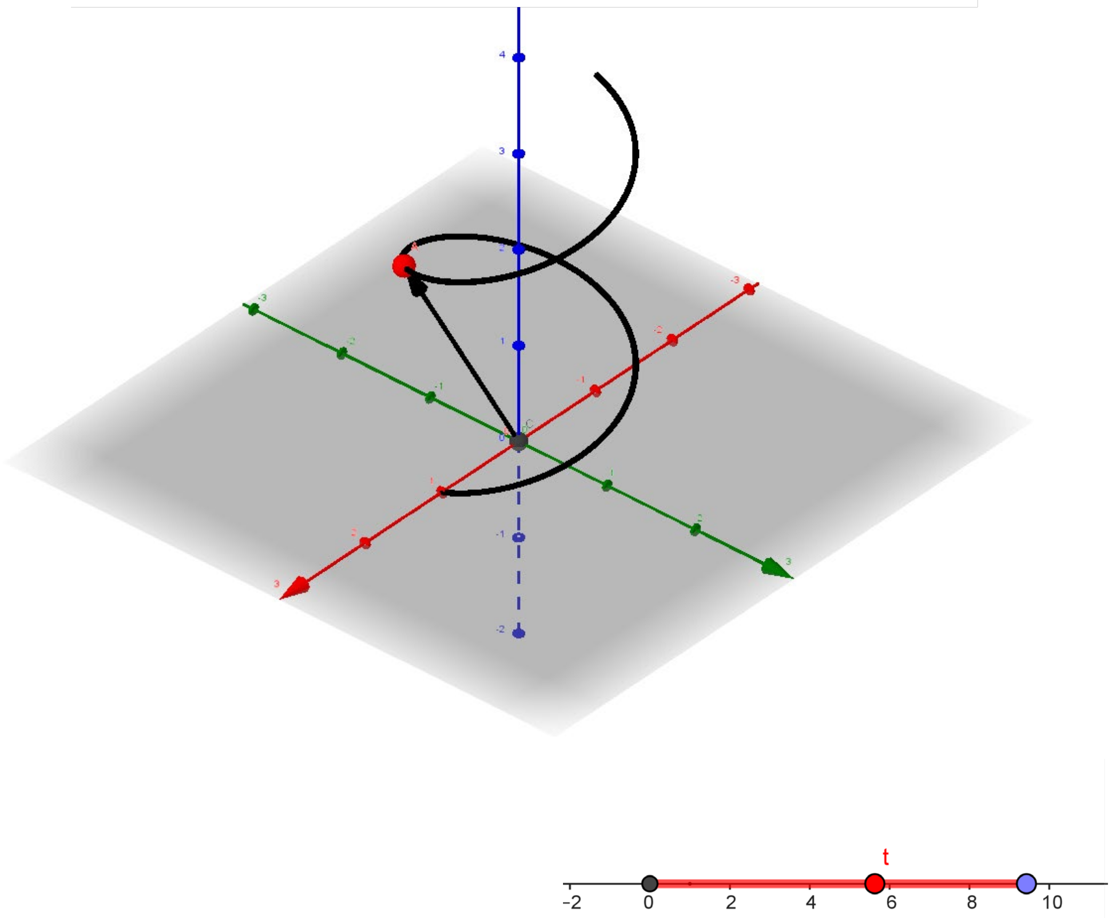


Vektorová funkce

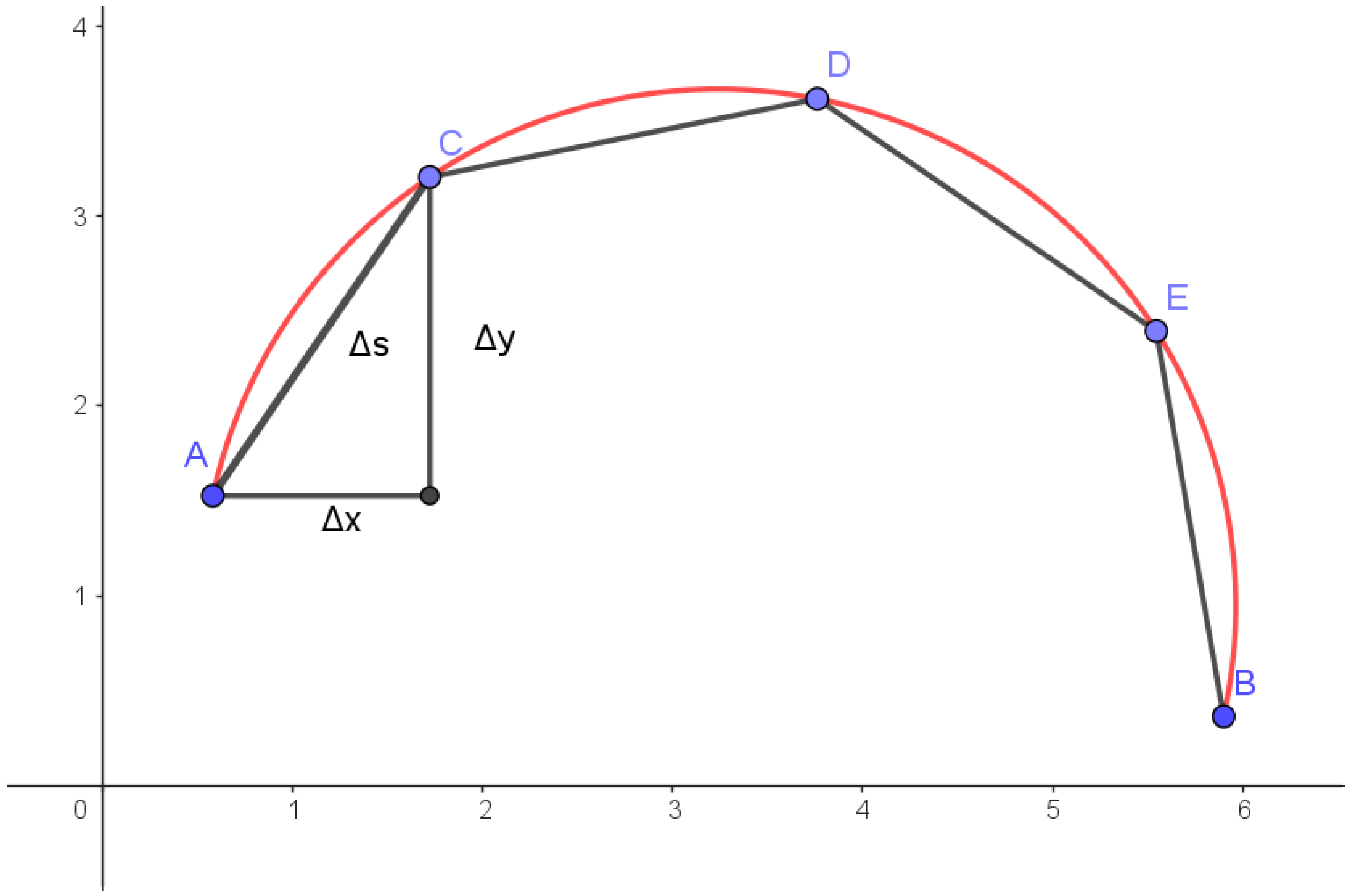
$$P(t) = (r\cos(t), r\sin(t), v_0 t)$$

$$P(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in J$$





Délka křivky



$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\mathbf{D} = \sum \mathbf{\Delta s}$$

$$\Delta s = \sqrt{(\frac{\Delta x}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta y}{\Delta t})^2}\,\Delta t$$

$$\Delta s = \sqrt{(x(t)')^2 + (y(t)')^2}\,\Delta t$$

$$D = \int \sqrt{(x(t)')^2 + (y(t)')^2}\,dt$$

Délka pobřeží?

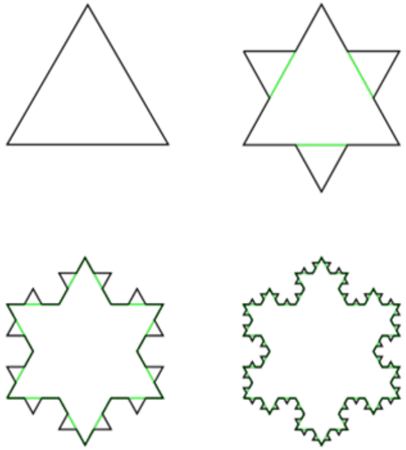
Anglický matematik **Lewis Fry Richardson** se rozhodl hledat vztah mezi pravděpodobností, že dvě země začnou válčit, a délkou jejich společné hranice.

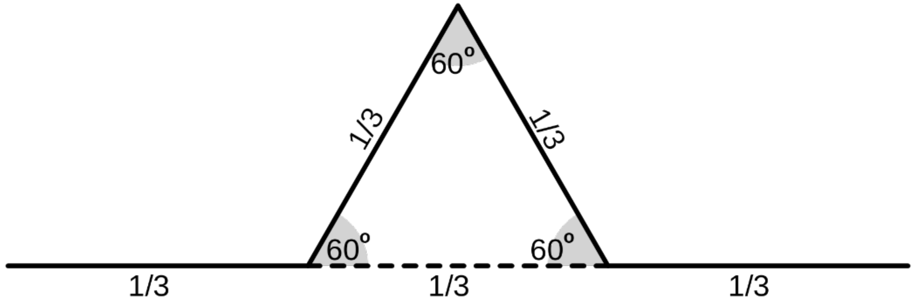
Paradox pobřeží: čím menší je pravítko, tím delší je výsledná linie pobřeží.

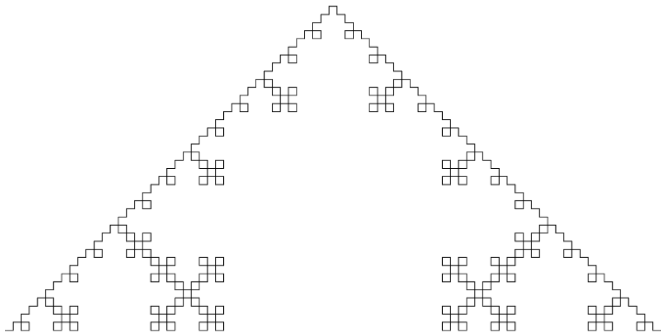
Benoit Mandelbrot si položil jinou otázku: Jaká je podstata tvaru pobřeží? Ta se stala mezníkem úvah v jeho práci: „Jak dlouhé je pobřeží Velké Británie?“ (1977). Tato na první pohled jednoduchá otázka však po chvíli úvah nabývá hlubšího smyslu. Mandelbrot vyšel z poznatků Richardsona, který měřil ostrov Korsiku.

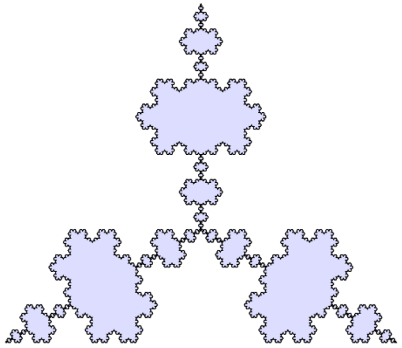
Mandelbrot použil pro změření délky pobřeží Velké Británie nejprve satelitních map, v druhém případě pak map turistických. Došel k závěru, že délka změřená z map turistických je 2x až 3x delší než délka změřená z map satelitních.
Důvod je následující: turistické mapy jsou mnohem podrobnější než mapy satelitní, což způsobí, že při měření délky pobřeží pomocí mapy satelitní je mnoho detailů zanedbáno či přehlédnuto a tyto detaily se projeví jako důležité při měření z map turistických.
Richardson empiricky odvodil vztah mezi délkou a měřítkem.

Kochova křivka (kochova vločka)



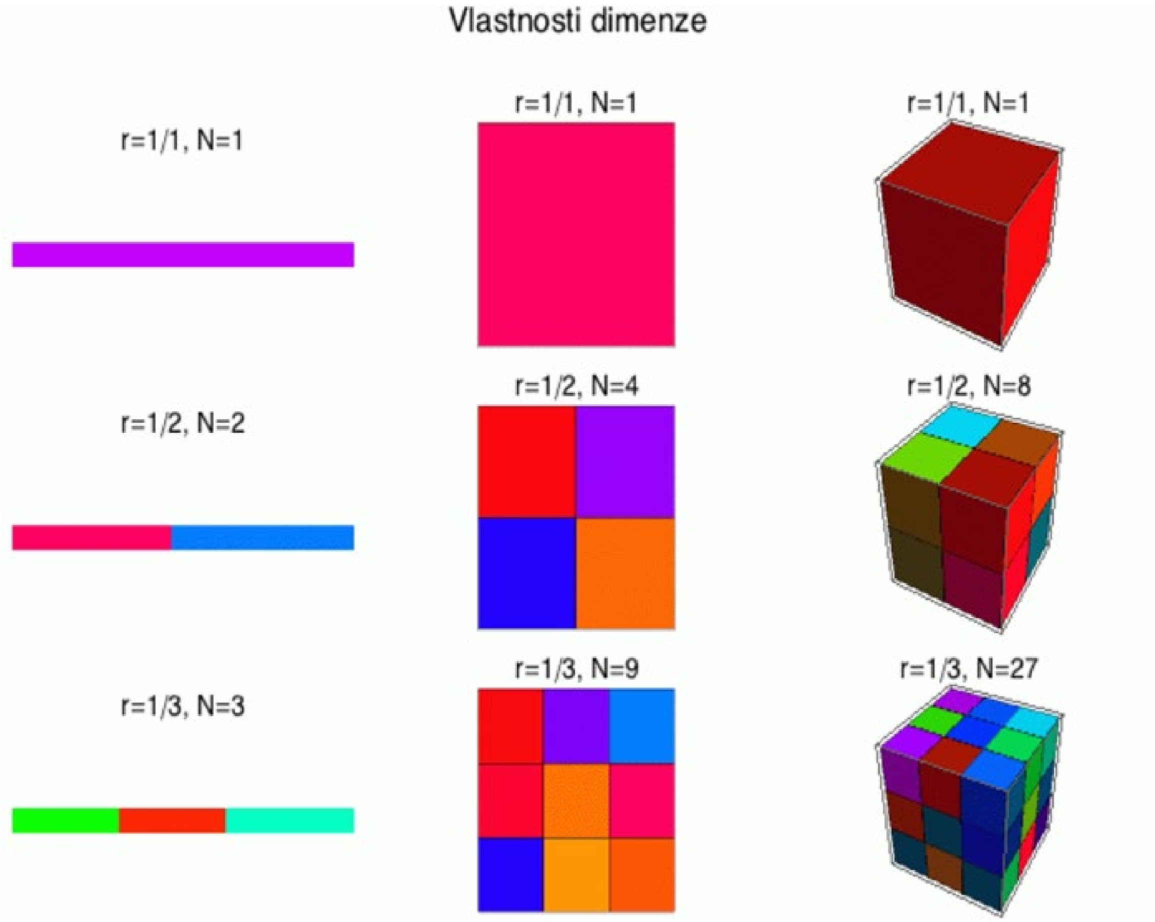






Niels Fabian Helge von Koch (1870 - 1924) byl švédský matematik, podle kterého byla pojmenována Kochova vločka, jedna z prvních popsaných fraktálních křivek

Fraktální dimenze



v různých dimenzích se míry objektů se změnou měřítka mění různým způsobem.

Představme si, že máme měřicí tyčinky (objekty) délky
r = 1,
r=1/2
r=1/3
Hledáme, kolik tyčinek (měřících objektů) potřebujeme k pokrytí původní délky

Jan Řeháček

Fraktální dimenze

Dá se tedy říci, že v D dimenzích se při změně měřítka r dá původní objekt pokrýt N zmenšenými kopiemi, kde N závisí na dimenzi takto:

1D: $N = 1/r$

2D: $N = 1/r^2$

3D: $N = 1/r^3$

Obecně v dimenzi D dostaneme: $N = (1/r)^D$

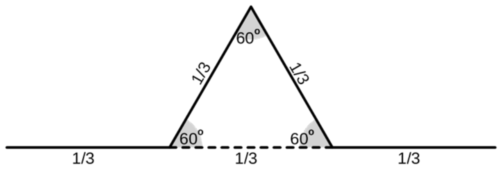
Na dimenzi se tedy můžeme dívat jako exponent, který nám ukazuje, jak dostat počet pokrývajících objektů z použitého měřítka

$$\log(N) = D*\log(1/r) = -D*\log(r)$$

$$\boxed{D = \frac{log(N)}{log(\frac{1}{r})}}$$

dimenze je vlastně konstantou úměrnosti mezi logaritmem měřítka a logaritmem počtu kopií

U Kochovy vločky se při změně měřítka na r = 1/3 v objektu objeví N = 4 kopie měřicí tyčinky a fraktální dimenze Kochovy vločky bude D = log(4)/log(3) = 1,26



Minkowského dimenze

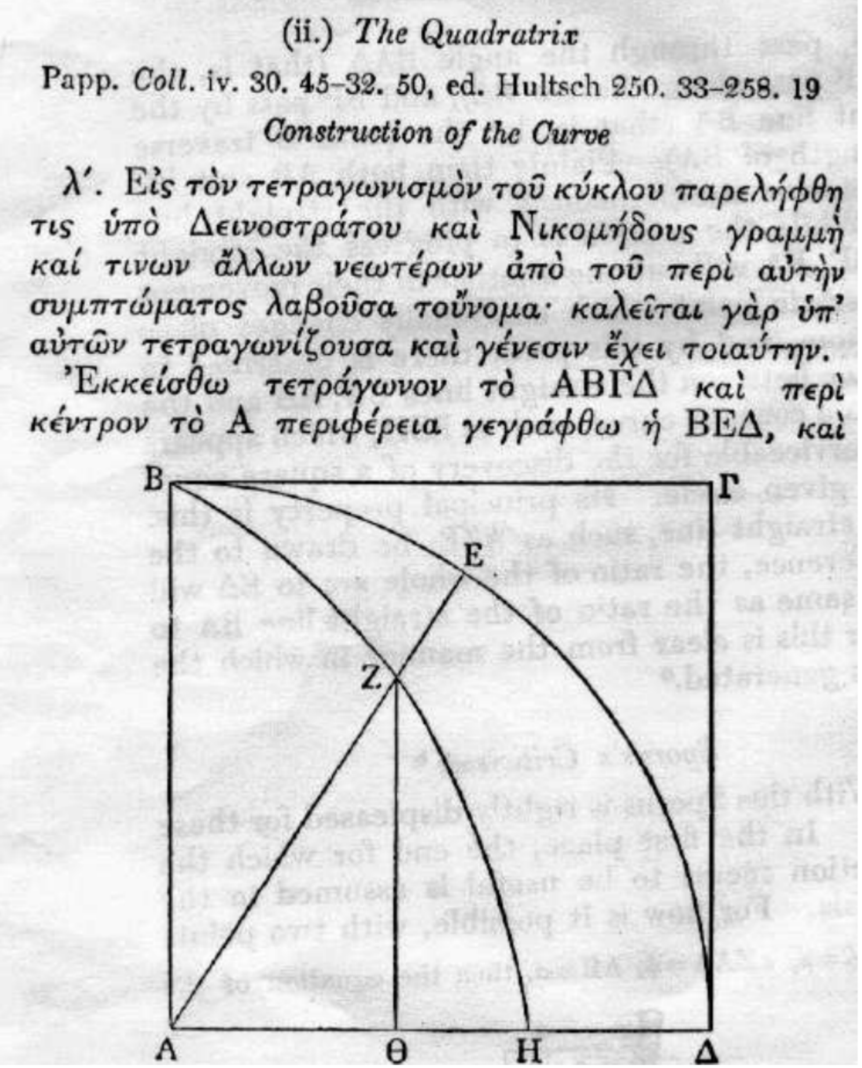
Hausdorfova dimenze

Tři klasické problémy antické matematiky

- **Zdvojení krychle**: Je možné narýsovat krychli o objemu dvakrát větším, než má krychle původní?
- **Kvadratura kruhu**: Je možné narýsovat čtverec o stejném obsahu, jaký má daný kruh?
- **Trisekce úhlu**: Je možné konstrukčně rozdělit daný úhel na tři stejné části?

Kolik klasických geometrů zvládne vyměnit žárovku?
Ani jeden, protože to nejde udělat jen za použití pravítka a kružítka.

Hippiova kvadratrix



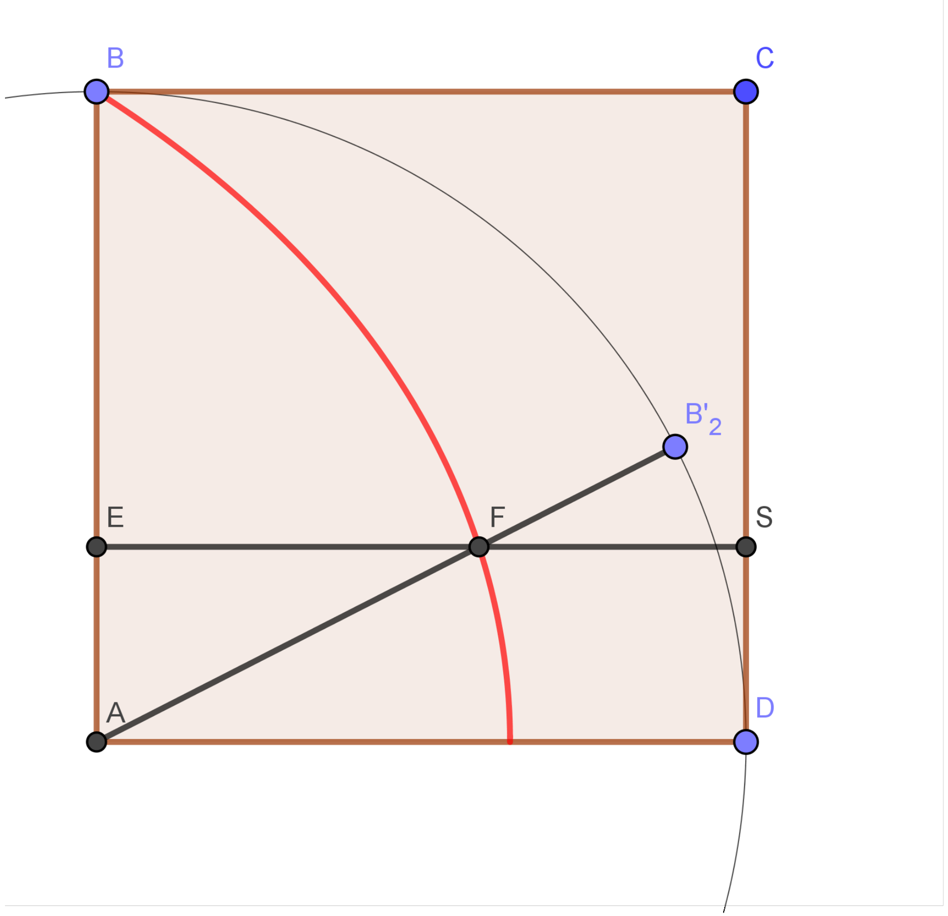
(ii.) *The Quadratrix*

Papp. *Coll.* iv. 30. 45–32. 50, ed. Hultsch 250. 33–258. 19

Construction of the Curve

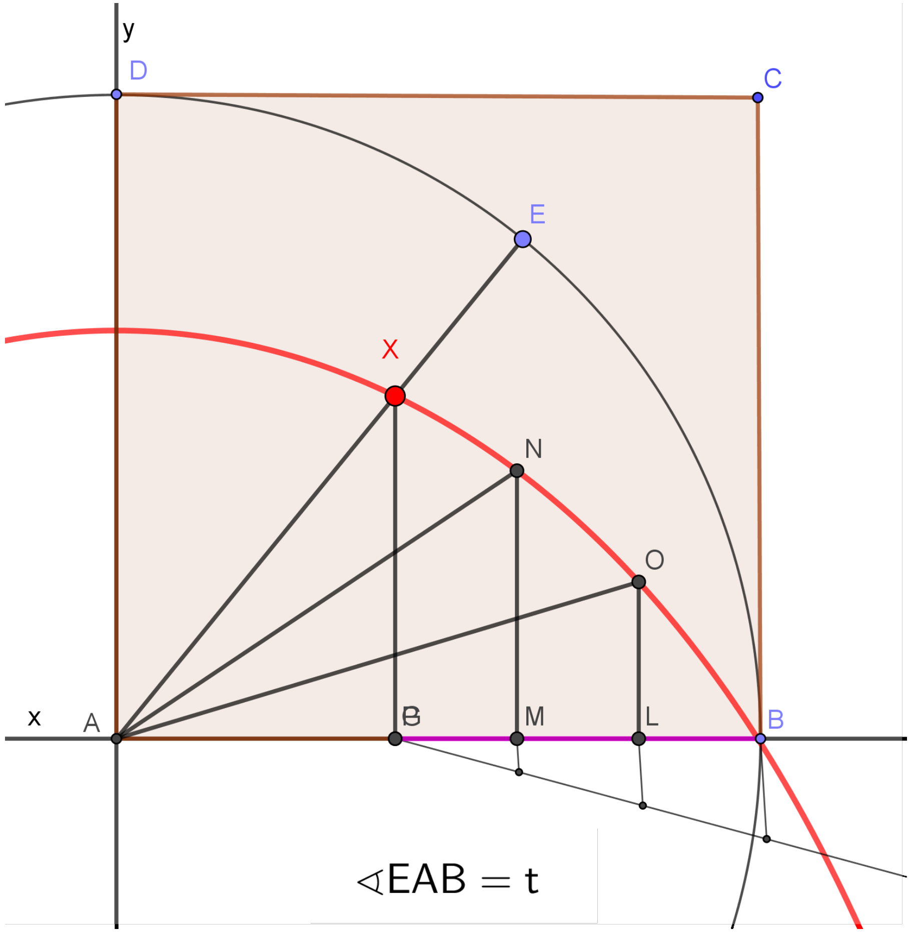
λʹ. Εἰς τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου παρελήφθη τις ὑπὸ Δεινοστράτου καὶ Νικομήδους γραμμὴ καί τινων ἄλλων νεωτέρων ἀπὸ τοῦ περὶ αὐτὴν συμπτώματος λαβοῦσα τοὔνομα· καλεῖται γὰρ ὑπ' αὐτῶν τετραγωνίζουσα καὶ γένεσιν ἔχει τοιαύτην.

Ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ καὶ περὶ κέντρον τὸ Α περιφέρεια γεγράφθω ἡ ΒΕΔ, καὶ



Hippias z Elis (5. st. př. n l.)

Trisekce úhlu pomocí Hippiovy kvadratrix



$$\frac{t}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1-x}{1} \rightarrow t = \frac{\pi}{2}(1-x)$$

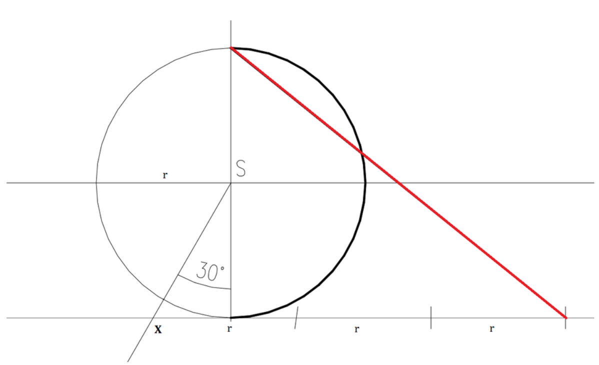
$$tg(t) = \frac{y}{x} \rightarrow y = x \cdot tg(t)$$

$$y = x \cdot tg(\frac{\pi}{2}(1-x))$$

$$\boxed{y = x \cdot cotg(\frac{x\pi}{2})}$$

Kvadratura kruhu
Rektifikace (kružnice)

Kochaňského rektifikace



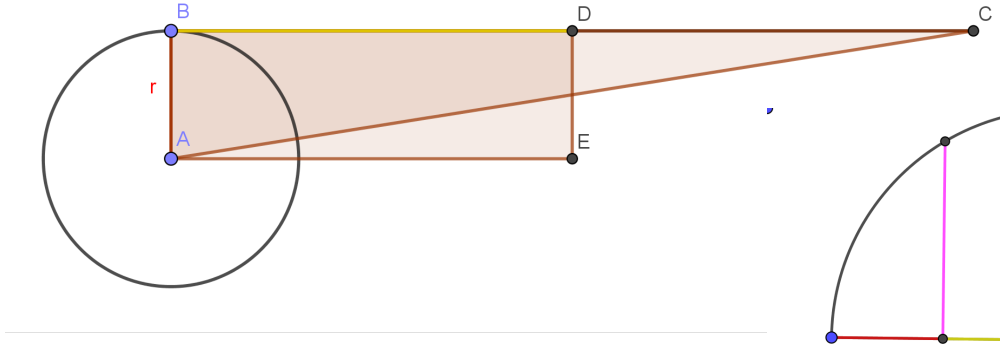
úkolem je sestrojit ke kružnici úsečku o stejné délce

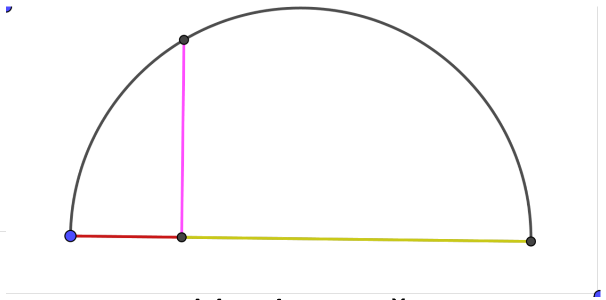
$O=2\pi r$

Obsah kruhu je stejný jako obsah trojúhelníku o straně O a výšce r

$S=\pi r^2$

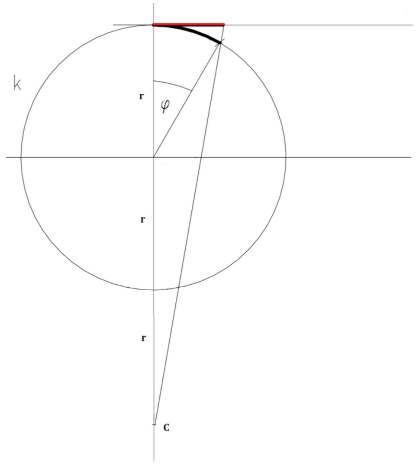
$S=1/2\ O\ r$





Eukleidova věta

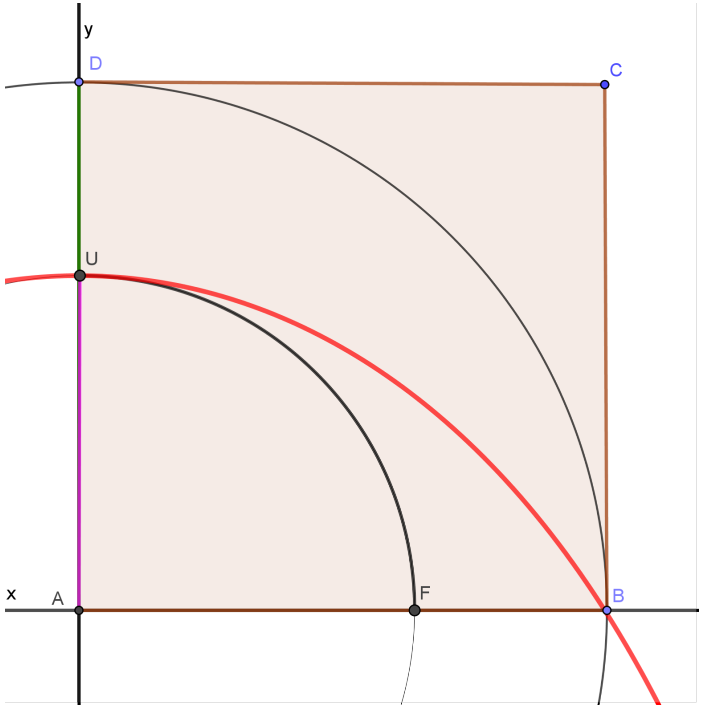
Sobotkova rektifikace

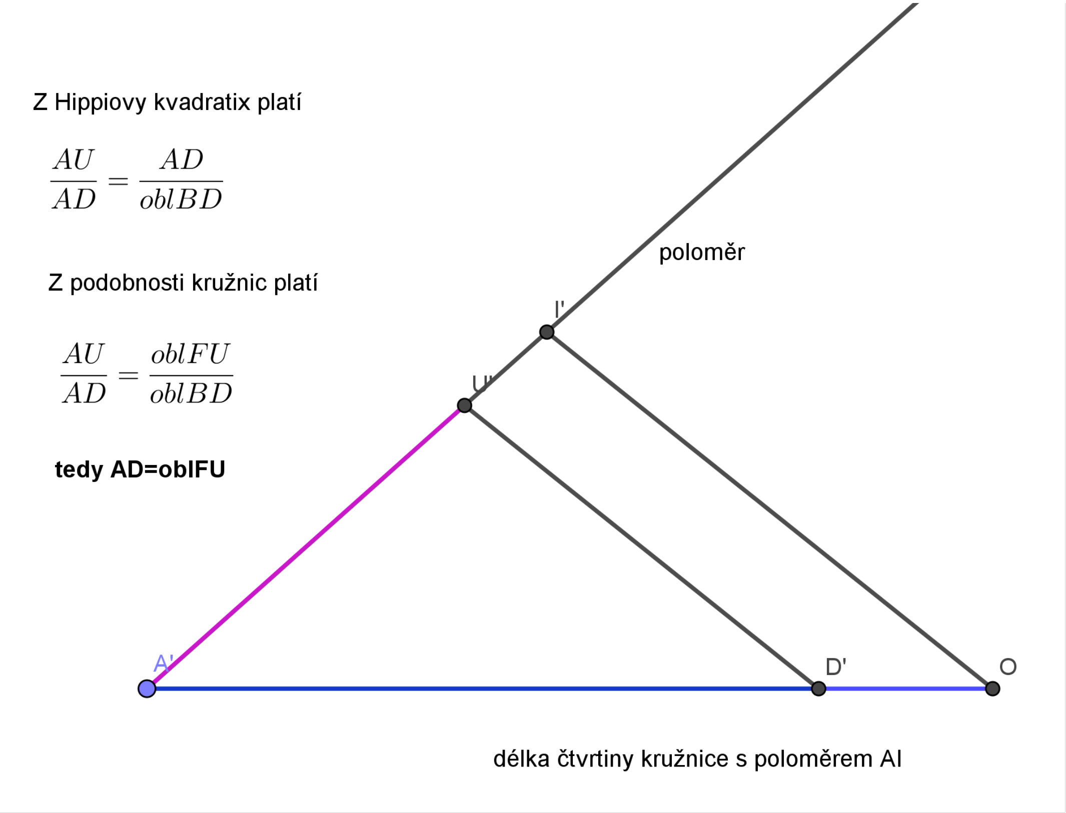


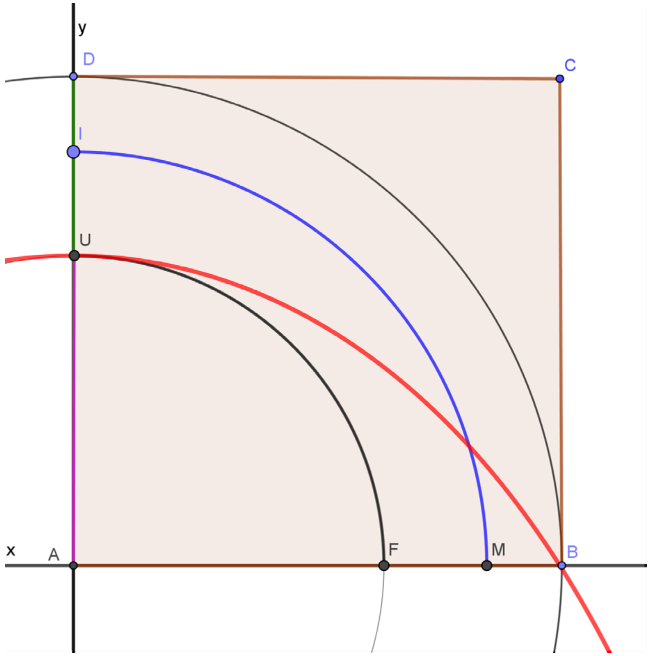
matematicky ekvivalentní ke kvadratuře kruhu

Pokud umíme sestrojit délku kružnice (úsečku délky O), umíme sestrojit čtverec stejného obsahu

Rektifikace kružnice pomocí Hippiovy kvadratrix

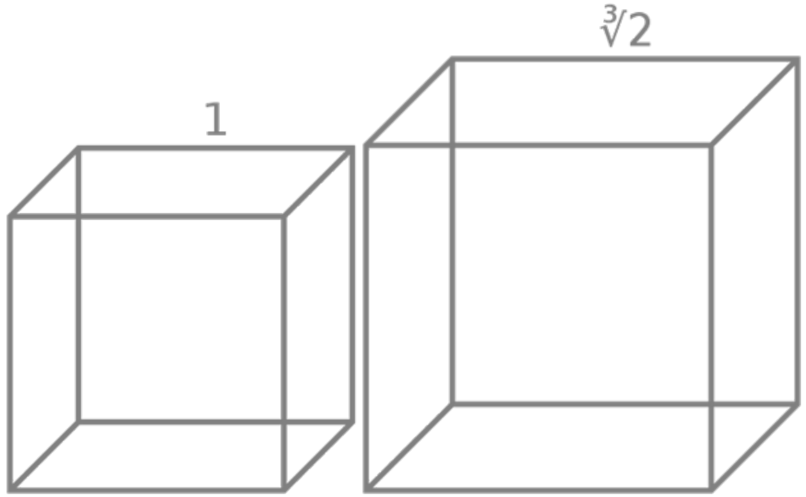




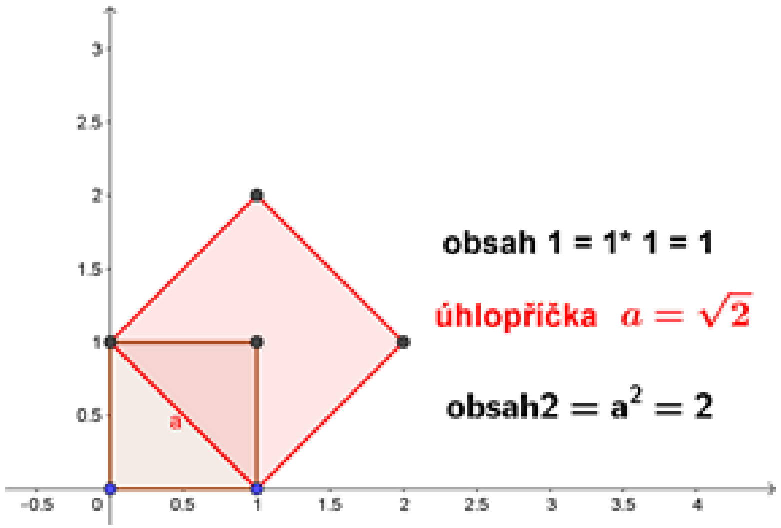


Zdvojení (duplikace) krychle
Délský problém

- lidem z ostrova Délos věštba uložila zdvojnásobit jejich oltář
- K dané krychli zkonstruujte krychli s dvojnásobným objemem **pouze za užití pravítka a kružítka**.



Zdvojení čtverce - jednoduché



Ale my chceme třetí odmocninu ze dvou !

Až v 19. století Pierre Wantzel užitím nových výsledků algebry dokázal, že úlohu zdvojení krychle nelze pouze za použití pravítka a kružítka provést.

Délský problém

Hippokrates z Chiu (5. století př.n.l.) redukoval problém na nalezení dvou středních geometrických úměrných.

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

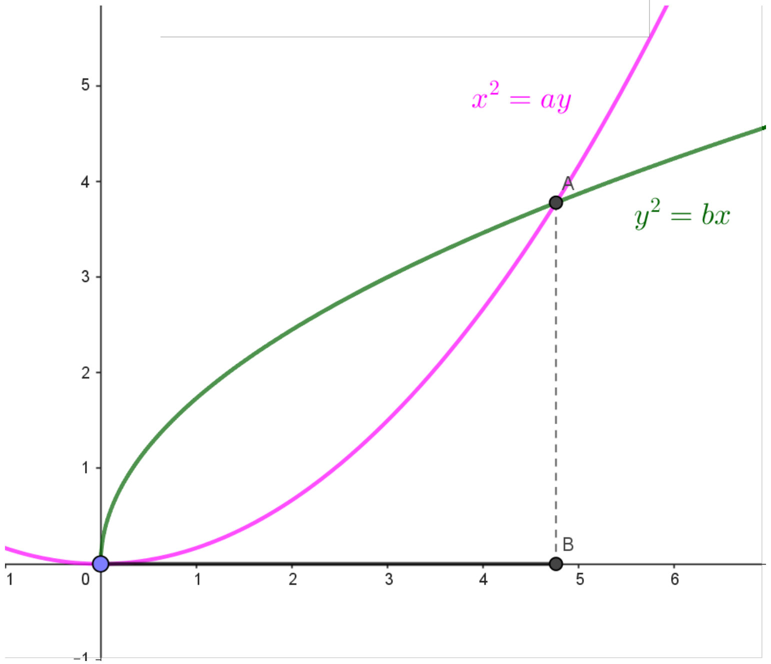
$$\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a}{x}\frac{x}{y}\frac{y}{b} = \frac{a}{b}$$

$$a = 2b$$

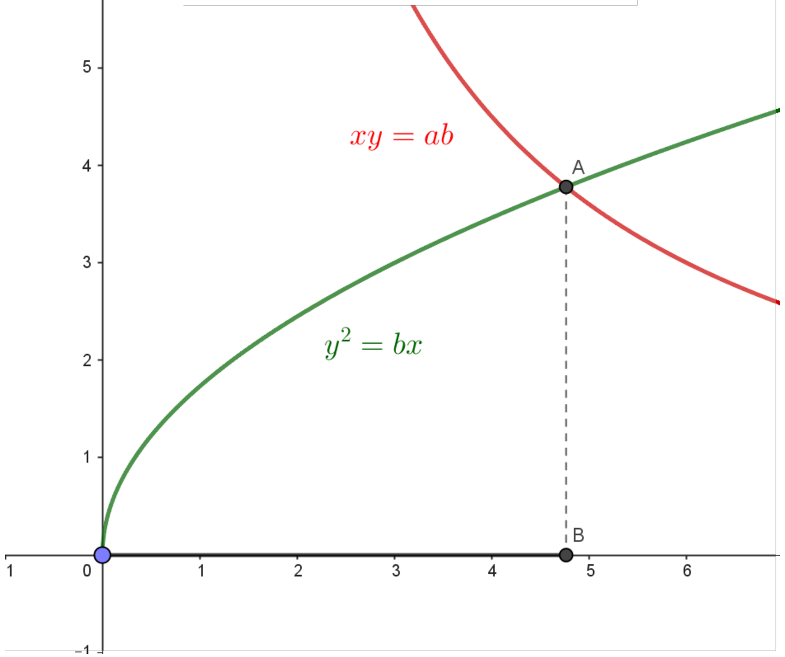
$$\boxed{a^3 = 2x^3}$$

Menaichmos (řecky Μέναιχμος)
4. století před n. l.

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \qquad \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

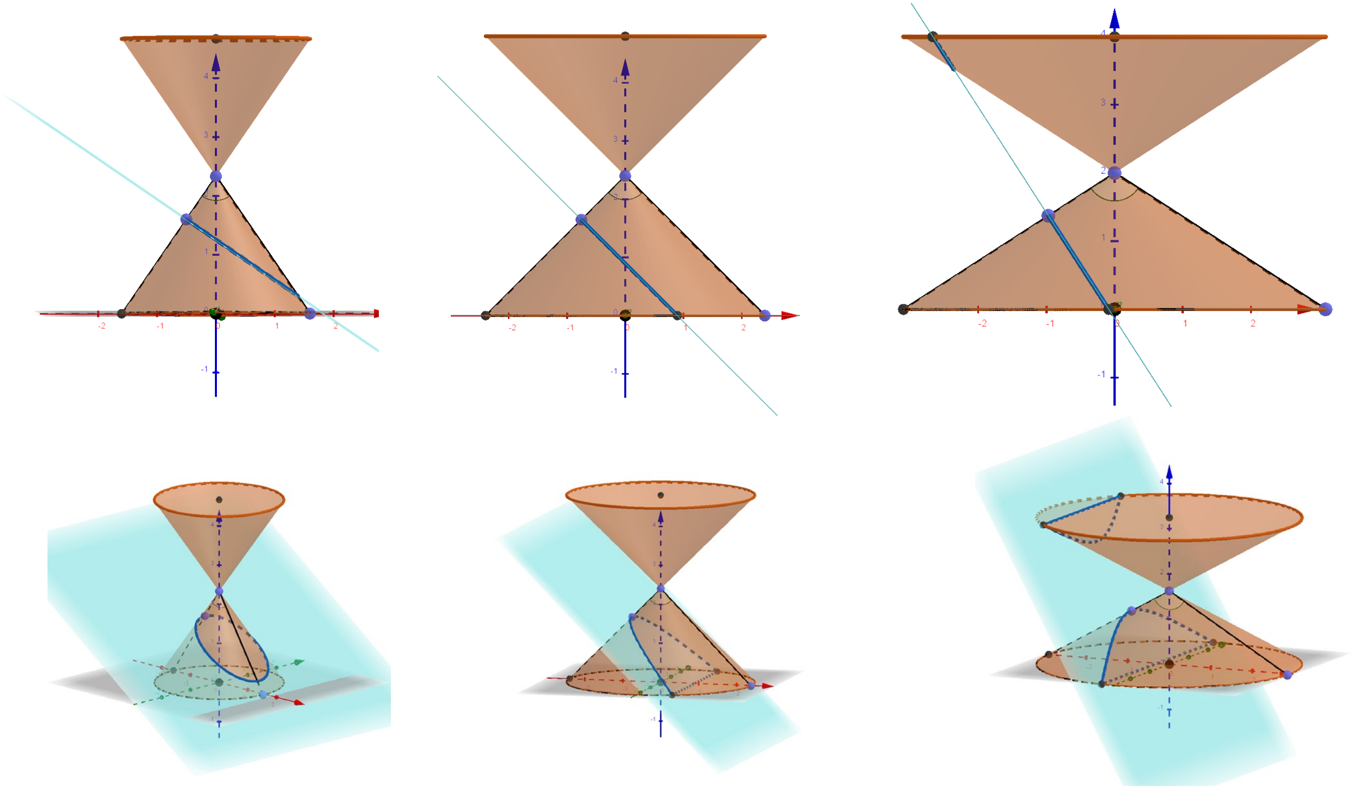


$$\frac{a}{x} = \frac{y}{b} \qquad \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$



Triady Menaechmovy

- Kruhový přímý kužel proťal rovinou kolmou na stranu kužele.
- Podle toho, svírají-li strany kužele, vycházející z krajních bodů libovolného průměru kružnice, která je podstavnou hranou kužele, úhel ostrý, pravý nebo tupý.
- Aristaeus (žil asi 350 l. př. Kr.) nebo Apollonius z Pergy (262 - 190 před n.l.) pojmenoval tyto tři druhy kuželoseček
- **parabola** - paraballein = vyrovnávat se, rovnat se,
- **hyperbola** - hyperballein = nadsadit, nadbývat
- **elipsa** - elleipen = nedostávat se, vynechat, popřípadě elleipsis = nedostatek.

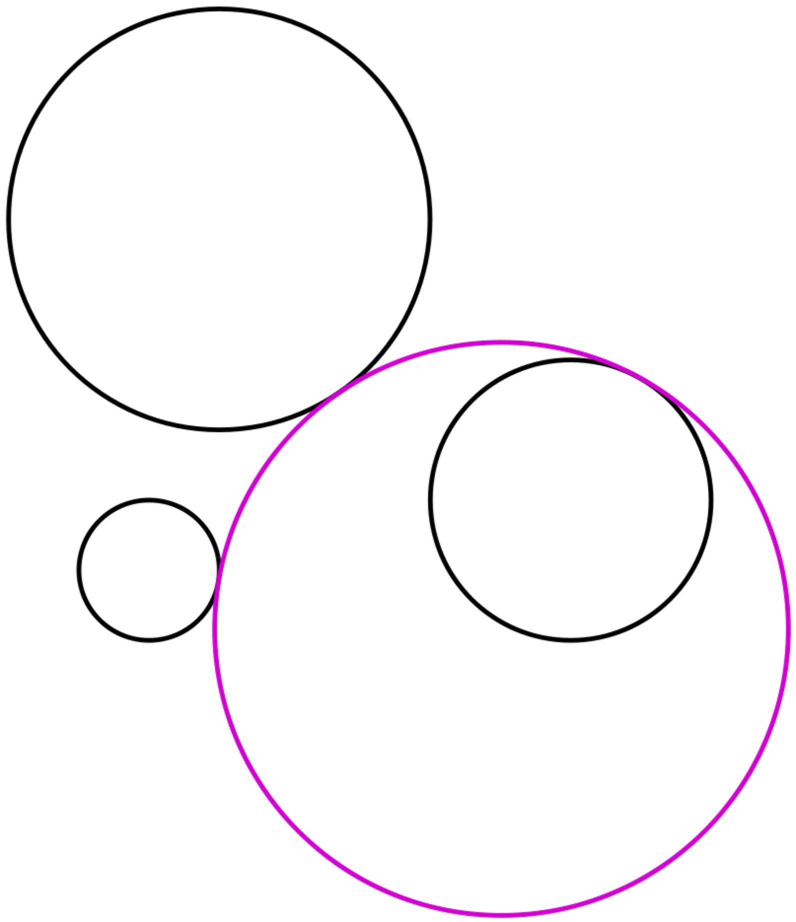


Apollónios z Pergy (3. – 2. století př. n. l.)

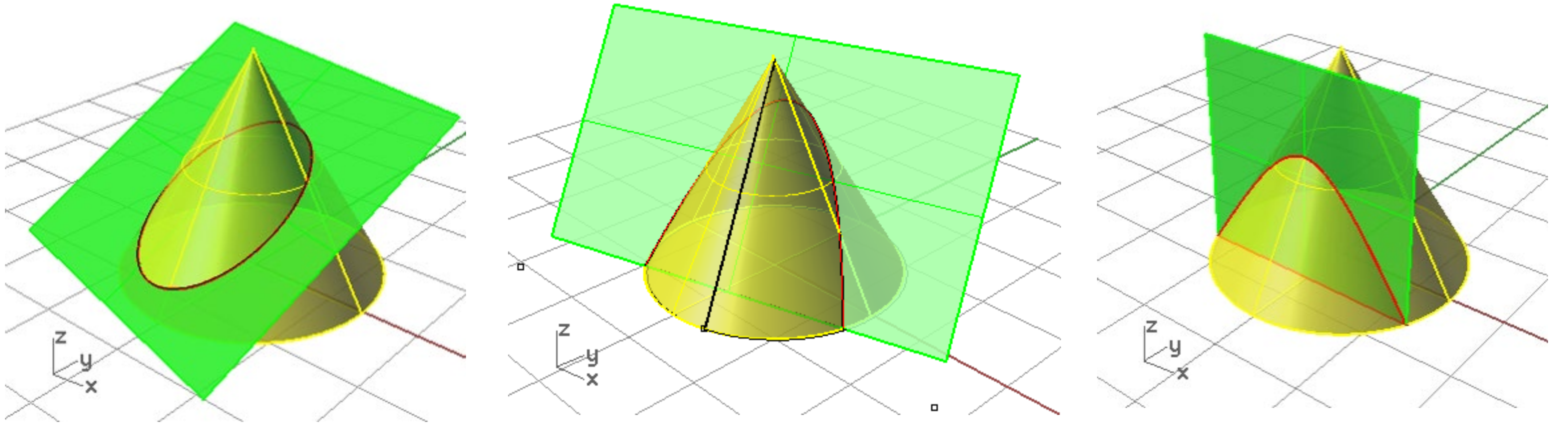
- osmidílné dílo Kónika – pojednání o kuželosečkách
- Čtyři díly se zachovaly v řeckém originálu, tři v arabských překladech, poslední, osmý díl, se zcela ztratil
- Dokázal, že všechny kuželosečky lze odvodit z rovinného řezu dvojitého kužele
- čerpal ze starších prací o kuželosečkách (patrně zejména Menaichma, Aristaia staršího, Euklida, Konóna ze Samu a Nikoleta z Kyrény)
- jeho práce byla tak průkopnická, že prakticky své předchůdce vymazala a jejich díla se přestala opisovat

Apolloniova úloha

- Napsal též dvoudílný spis O dotycích. Ten se nedochoval, avšak díky Dějinám matematiky Pappa Alexandrijského víme, že v této práci formuloval geometrickou úlohu zvanou dnes Apollóniova
- tedy úkol nalézt kružnici, která se dotýká tří daných geometrických útvarů - bodů, kružnic a přímek (nejtěžším případem jsou tři kružnice)



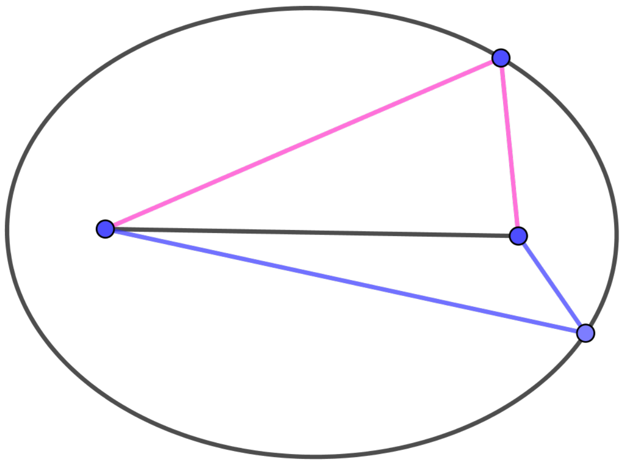
Kuželosečky

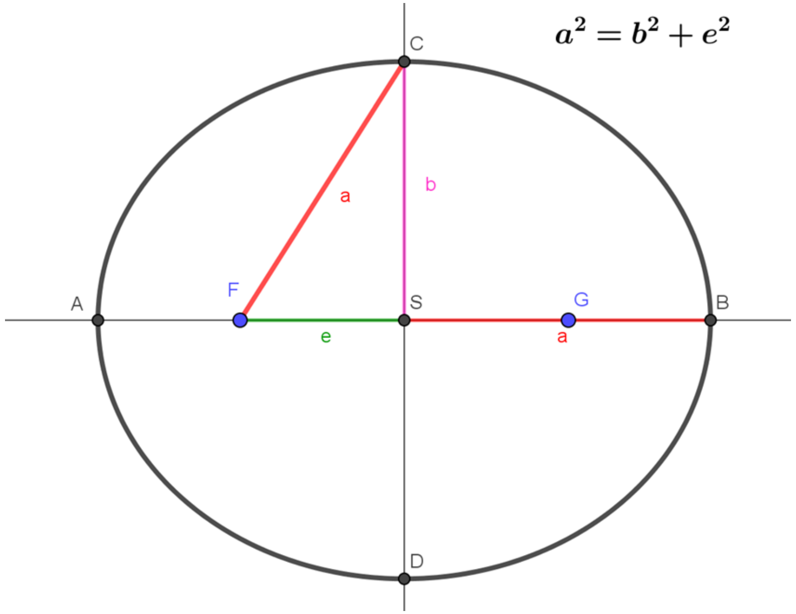


Množina bodů vyhovující rovnici $ax^2 + by^2 + c\,xy + dx + ey + f = 0$,
kde alespoň jeden z koeficientů a; b; c je různý od nuly.

Elipsa

Elipsa je množina všech bodů, které mají od dvou daných pevných bodů stálý součet vzdáleností, větší než vzdálenost daných bodů.





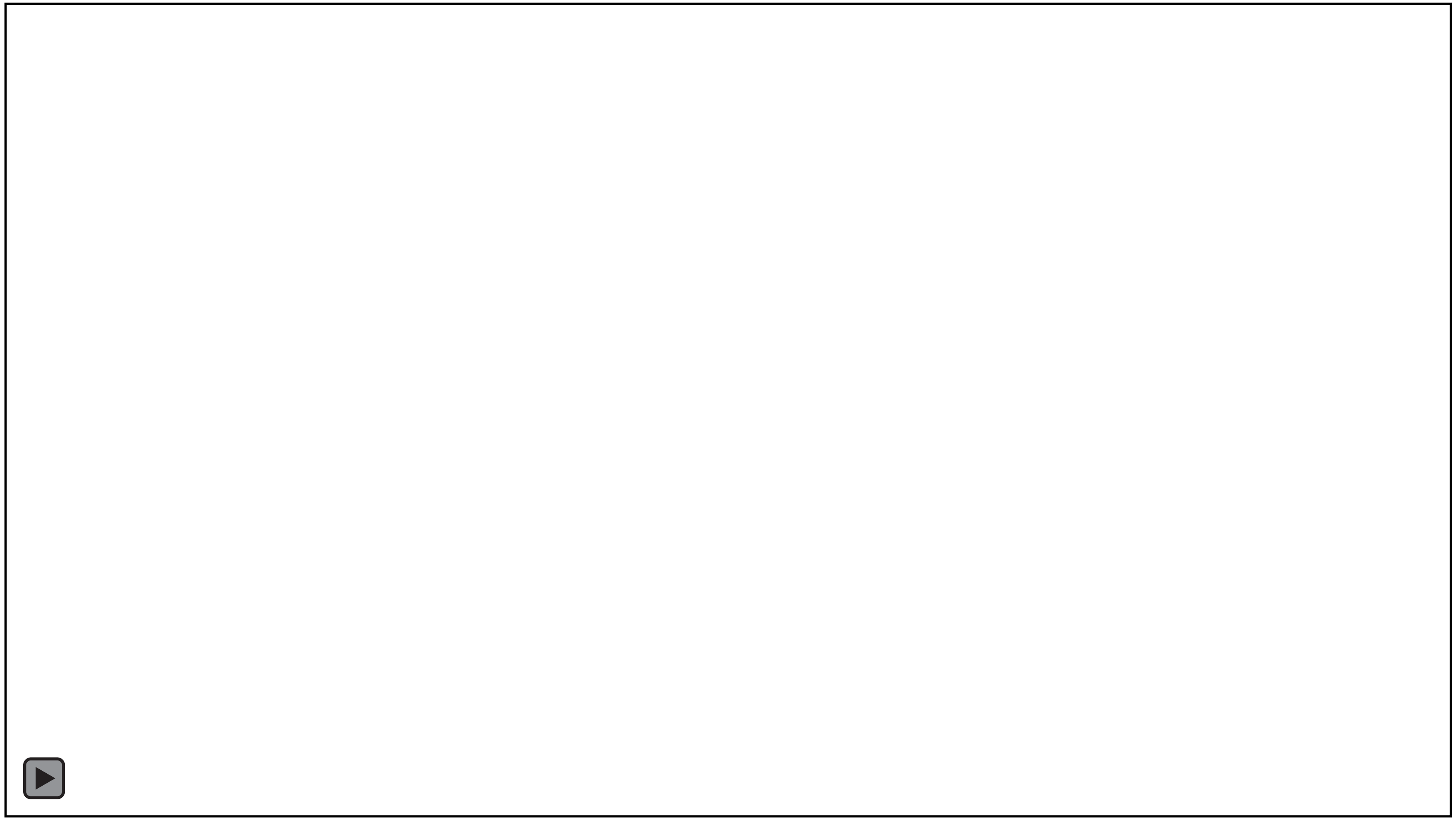
a … hlavní poloosa
b … vedlejší poloosa
e … excentricita

F, G … ohniska
A, B … hlavní vrcholy
C, D … vedlejší vrcholy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

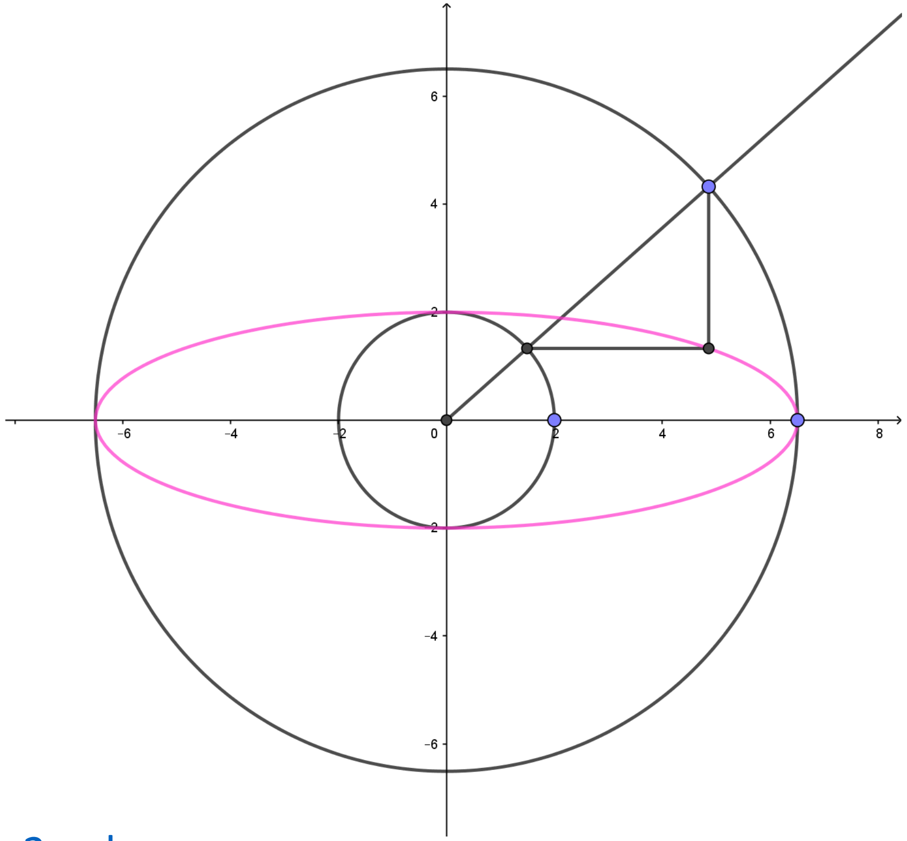
$$x = a\cos t + s_1$$
$$y = b\sin t + s_2,$$
$$t \in \langle 0, 2\pi)$$

Elipsa



Elipsa

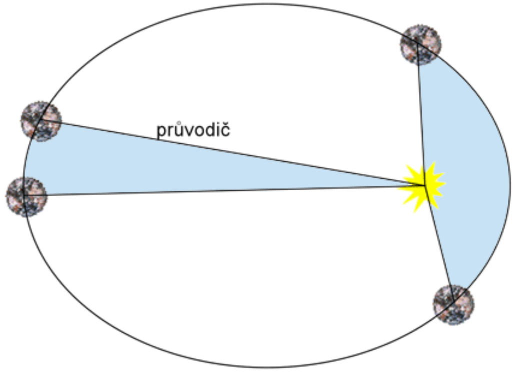
Elipsa – trojúhelníková konstrukce



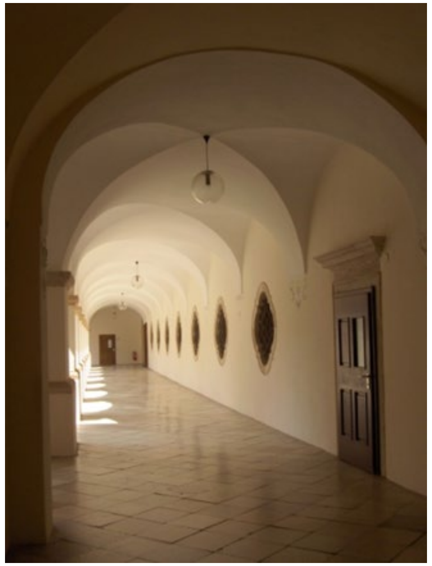
soubory\elipsa2.ggb

Elipsa

1. **Planety obíhají kolem Slunce po eliptických drahách, v jejichž jednom společném ohnisku je Slunce.**
2. **Obsahy ploch opsaných průvodičem planety (spojnice planety a Slunce) za stejný čas jsou stejně velké. Neboli: Úsečka spojující Slunce s planetou opíše za stejný čas také stejně velkou plochu.**
3. Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je stejný jako poměr třetích mocnin jejich velkých poloos (středních vzdáleností těchto planet od Slunce).

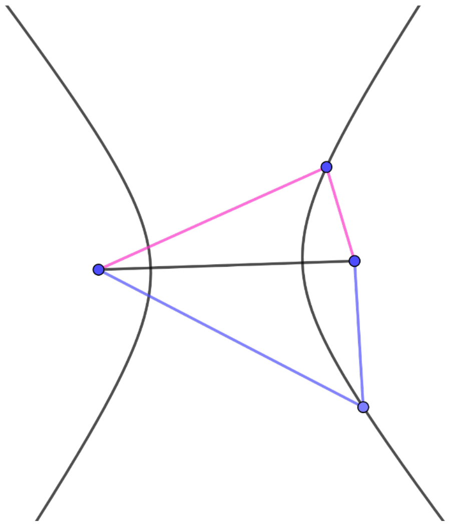


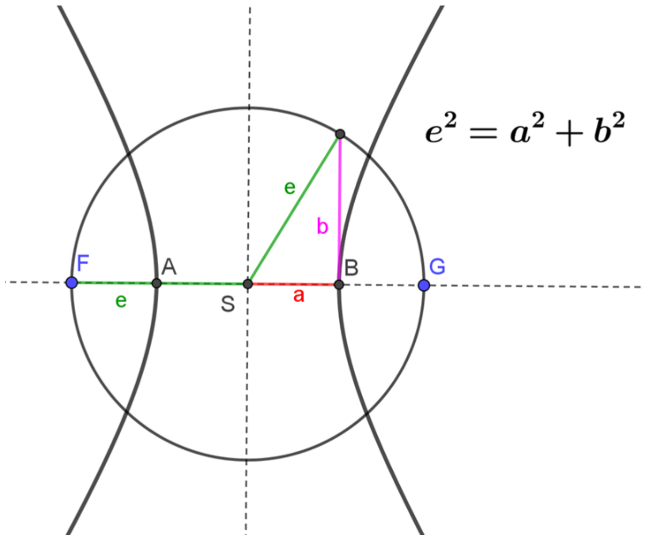
Tycho Brahe Planetarium / Copenhagen



Hyperbola

Hyperbola je množina všech bodů, které mají od dvou daných pevných bodů stálý rozdíl vzdáleností, menší než vzdálenost daných bodů.





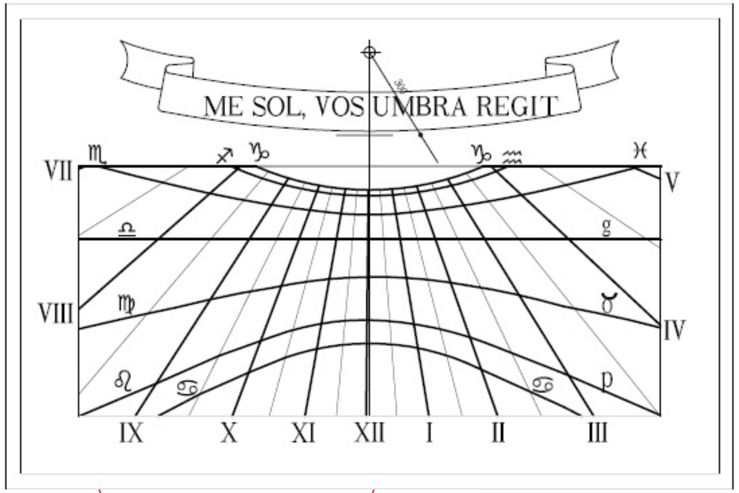
a ... hlavní poloosa
b ... vedlejší poloosa
e ... excentricita

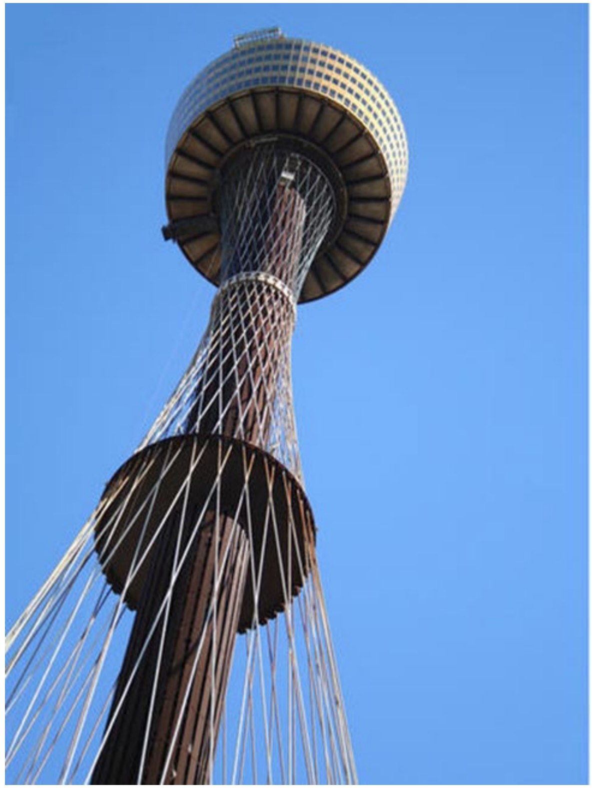
F, G ... ohniska
A, B ... hlavní vrcholy

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

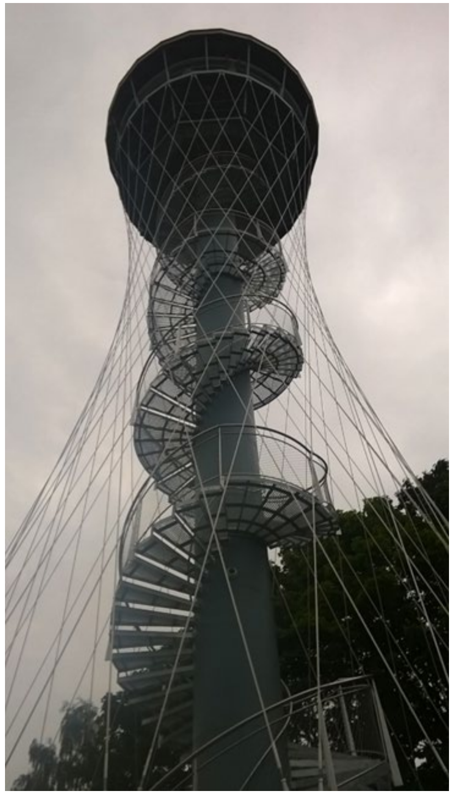
$$x = \frac{a}{\cos t} + s_1$$
$$y = b \tan t + s_2,$$
$$t \in \langle 0, 2\pi)$$

Hyperbola





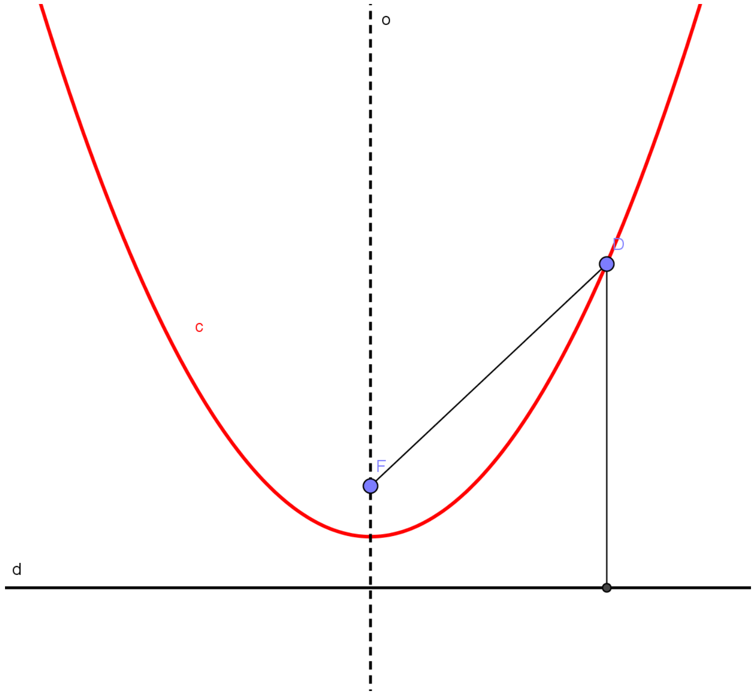
Sydney



Vysoká - Tachov

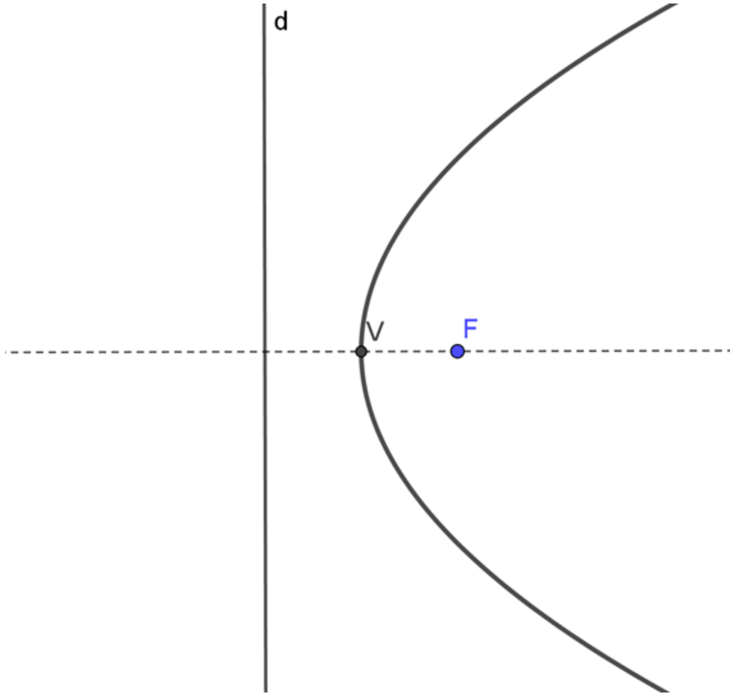
Parabola

Parabola je množina všech bodů, které mají od pevného bodu a pevné přímky, která tímto bodem neprochází, stejné vzdálenosti.



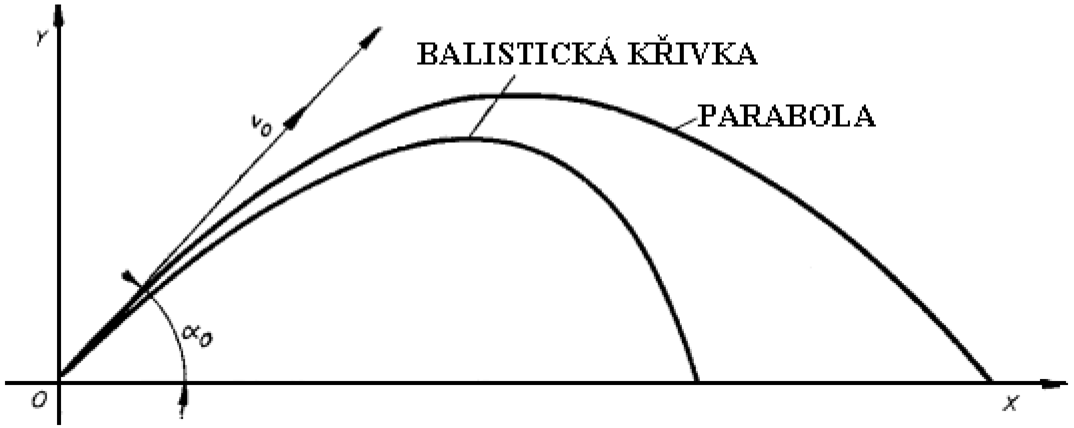
$y = px^2$

$x = py^2$

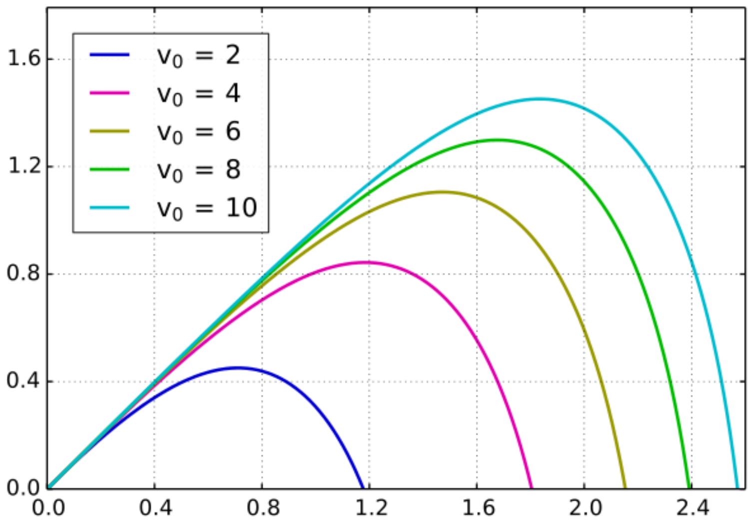


F … ohnisko
d … řídicí přímka
V … vrchol
VF … osa

Parabola



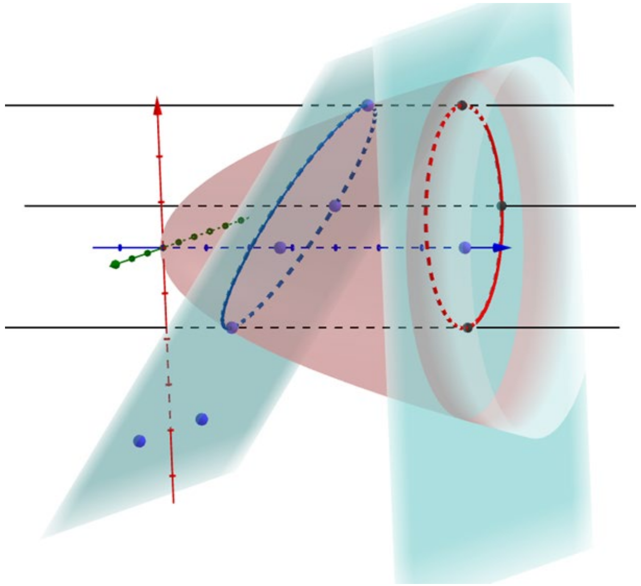
Trajektorie šikmého vrhu s nulovou odvrhovou výškou. Porovnání paraboly (idealizovaný případ) a balistické křivky (uvažuje odpor prostředí)

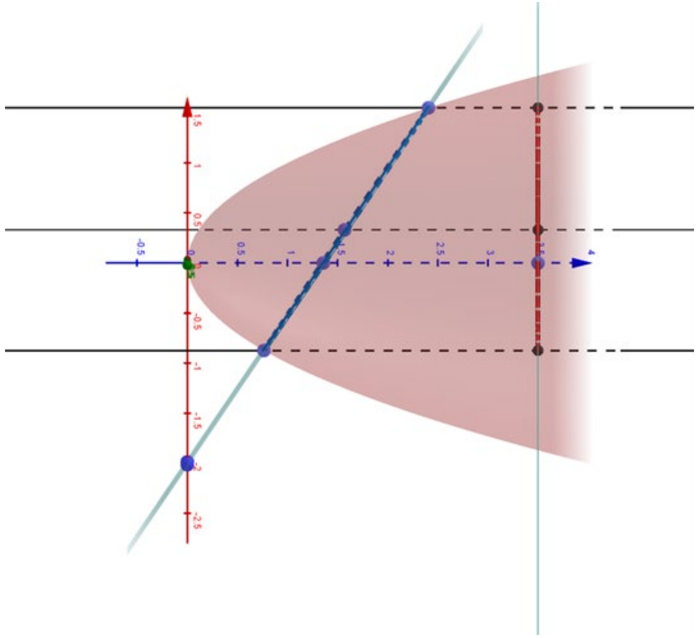


Parabola

Golden Gate Bridge

Parabola





Parabola

L'Oceanografic Valencie
Velké akvárium s delfináriem a 500 druhy, které zastupují hlavní mořské ekosystémy na světě

Built in 1896 by the Catalan architect Lluís Muncunill i Parellada for the textile manufacturer Josep Lluis Freixa Muncunil, it is a good example of the Modernista style of architecture that blossomed in Catalonia

Řetězovka- catenary (není to kuželosečka!)

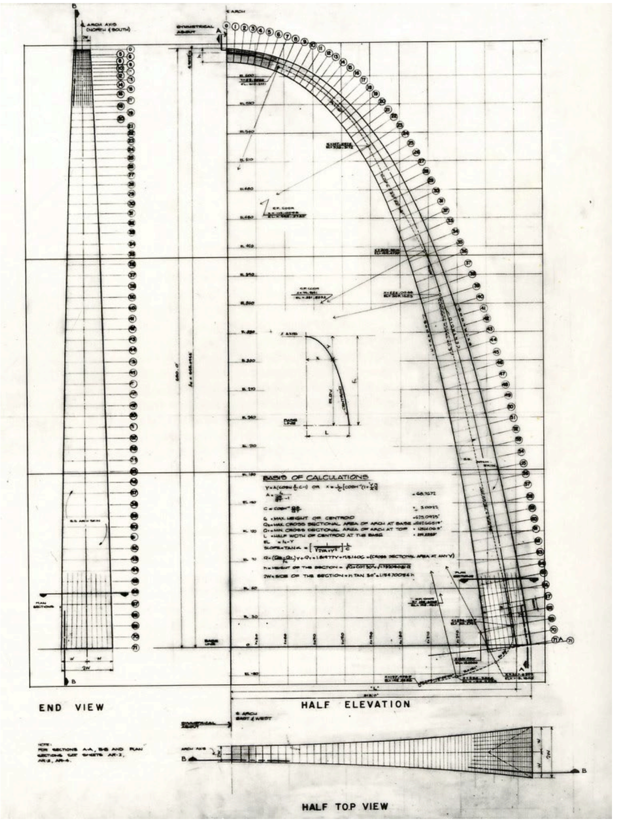
je křivka, kterou vytvoří řetěz (lépe řečeno homogenní dokonale pevné a ohebné vlákno), který je na svých koncích zavěšen (ne nutně ve stejné výšce) v homogenním gravitačním poli.

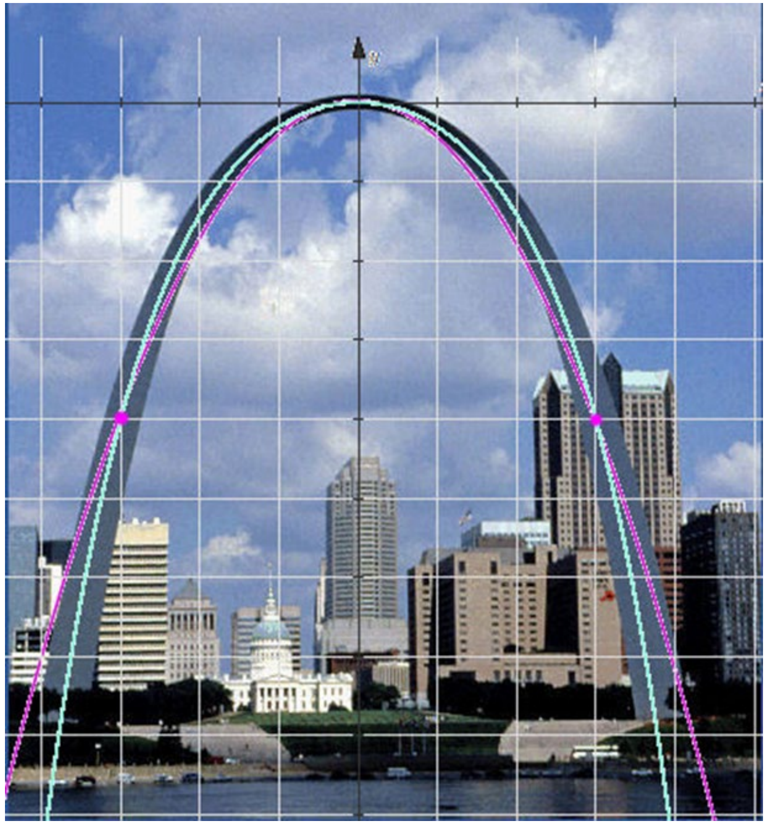
$$y = a \cdot cosh(\frac{x}{a})$$

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

Řetězovka viržinská (Physostegia virginiana)

Řetězovka x parabola

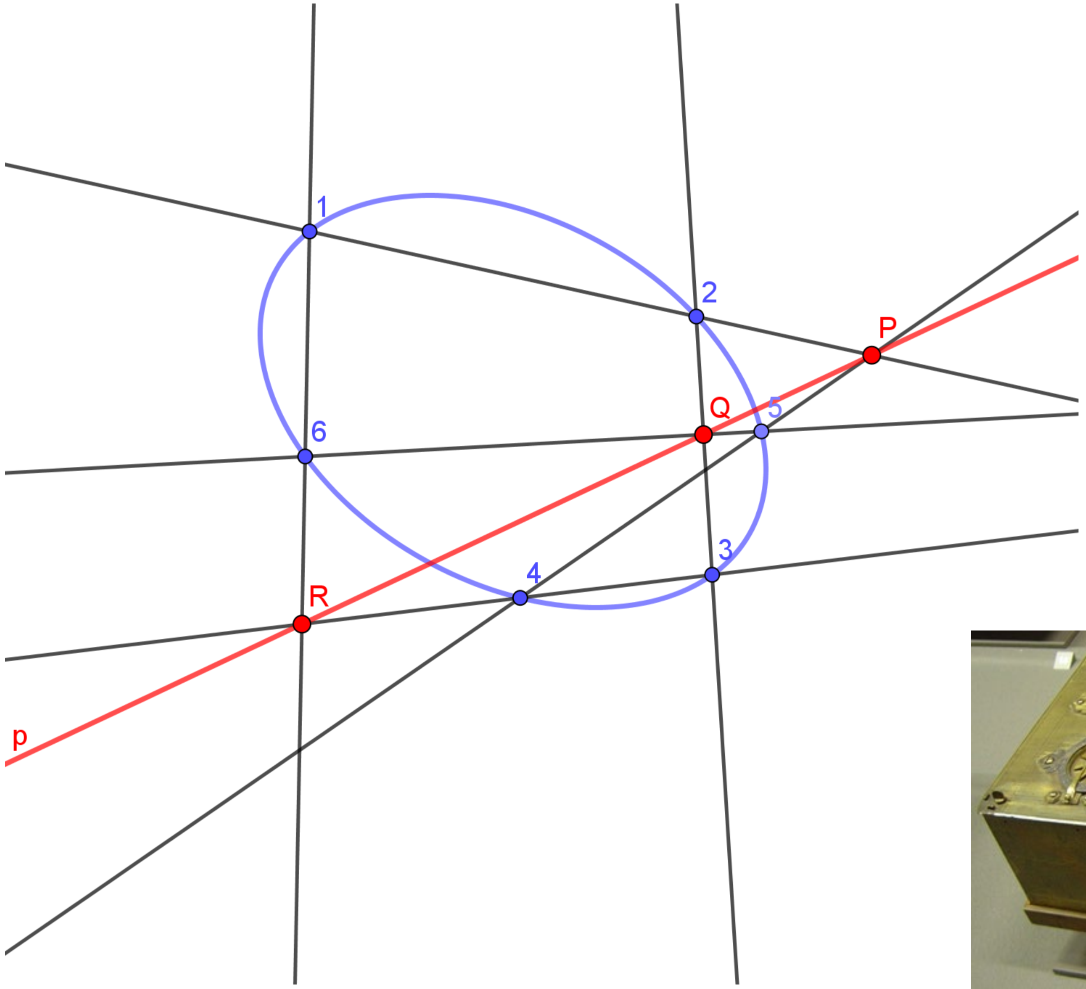




Gateway Arch je kovový oblouk v St. Louis, připomínající význam města pro osidlování amerického Západu v 19. století. Nachází se na břehu řeky Mississippi.

https://www.intmath.com/blog/mathematics/is-the-gateway-arch-a-parabola-4306

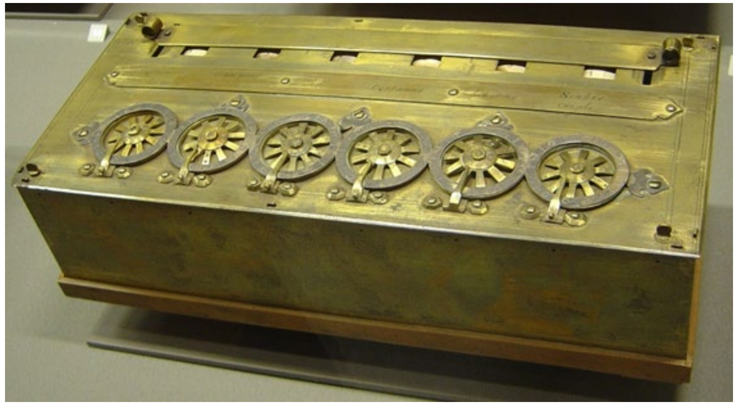
Pascalova věta



soubory\pascal.ggb

Blaise Pascal (1623 -1662)

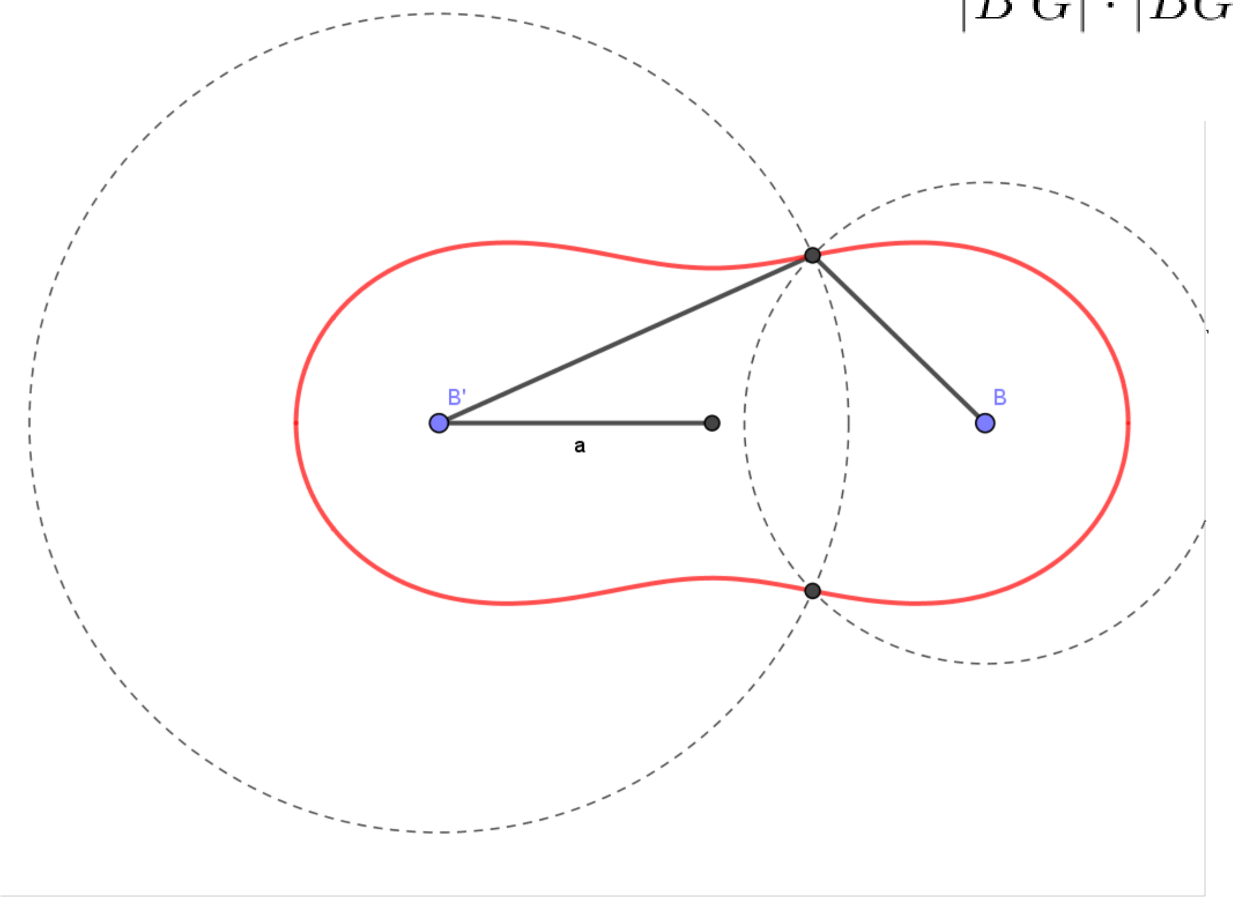
francouzský matematik, fyzik, spisovatel, teolog a náboženský filosof.

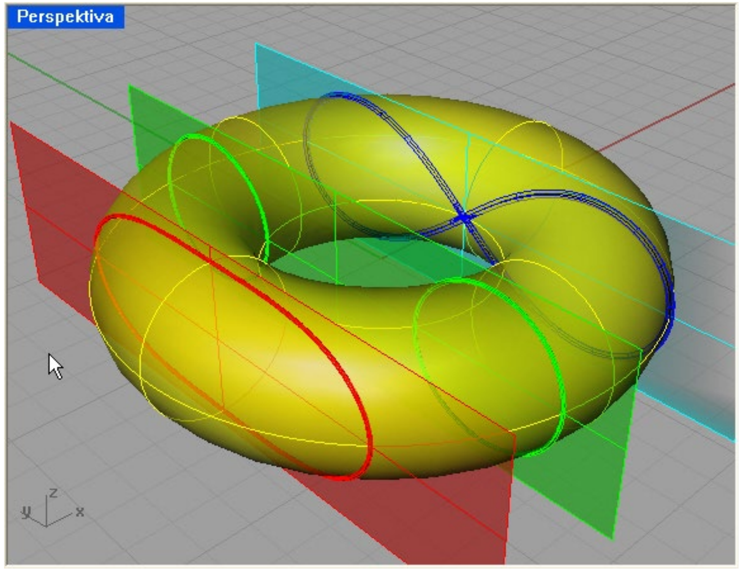


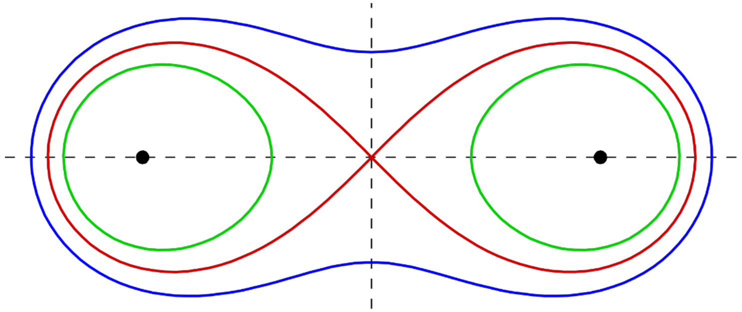
Cassiniho ovál

Součin vzdáleností od dvou pevně zvolených bodů je konstantní

$$|B'G| \cdot |BG| = b^2$$

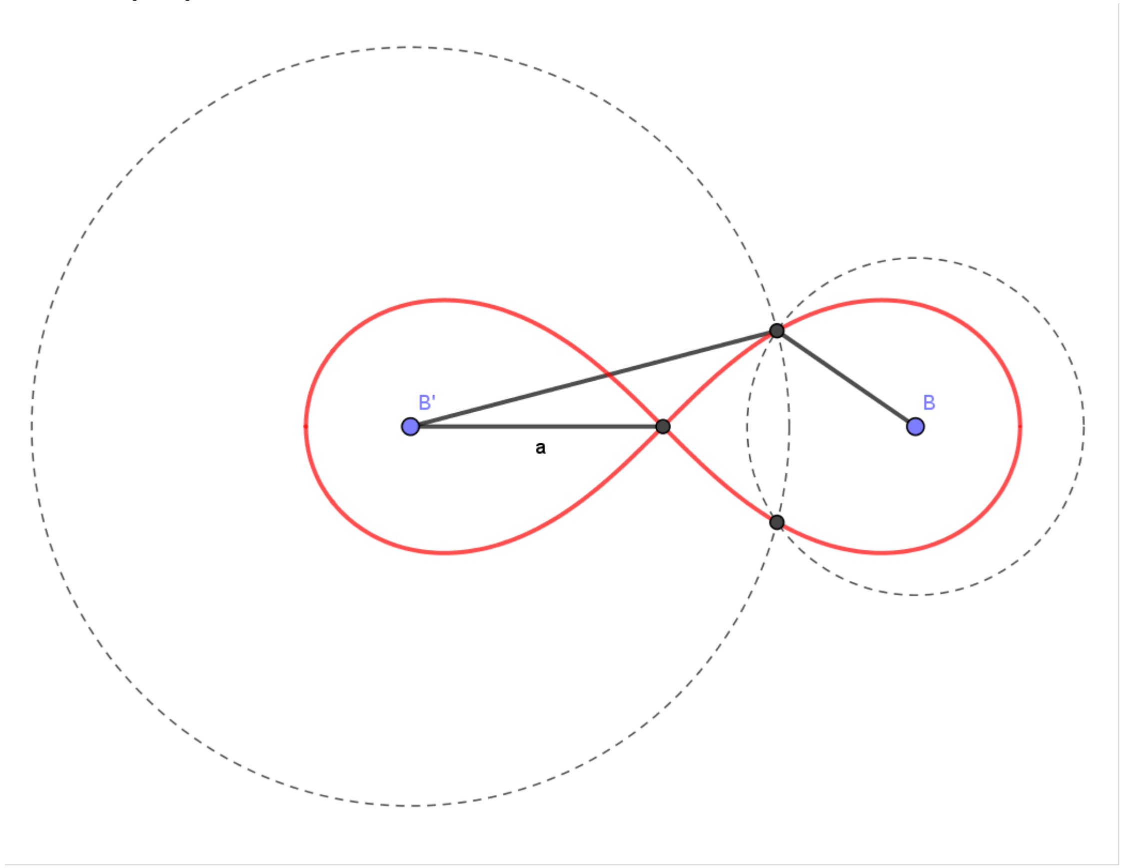






Bernoulliho lemniskata

Součin vzdáleností od dvou pevně zvolených bodů je konstantní
Speciální případ



Obraz hyperboly v kruhové inverzi

$$|B'G| \cdot |BG| = b^2$$

e=b/a

e=b/a=1

$$x = \sqrt{2e}\,\frac{\cos t}{1 + sin^2 t}$$

$$y = \sqrt{2e}\,\frac{\sin t \cos t}{1 + sin^2 t}.$$

Jak je křivka „křivá“

Chceme, aby pojem křivost korespondoval s naší intuitivní představou.

- Křivost křivky záleží na tvaru (ne na volbě parametrizace).
- Přímka "není křivá", tj. křivost je rovna nule.
- Kružnice s větším poloměrem má menší křivost než kružnice s menším poloměrem.

$$\boxed{({}^1k)^2 = \frac{(\boldsymbol{P}' \times \boldsymbol{P}'')^2}{(\boldsymbol{P}' \cdot \boldsymbol{P}')^3}}$$

První křivostí křivky rozumíme číslo ${}^1k(s_0) = |\ddot{\boldsymbol{P}}(s_0)|$

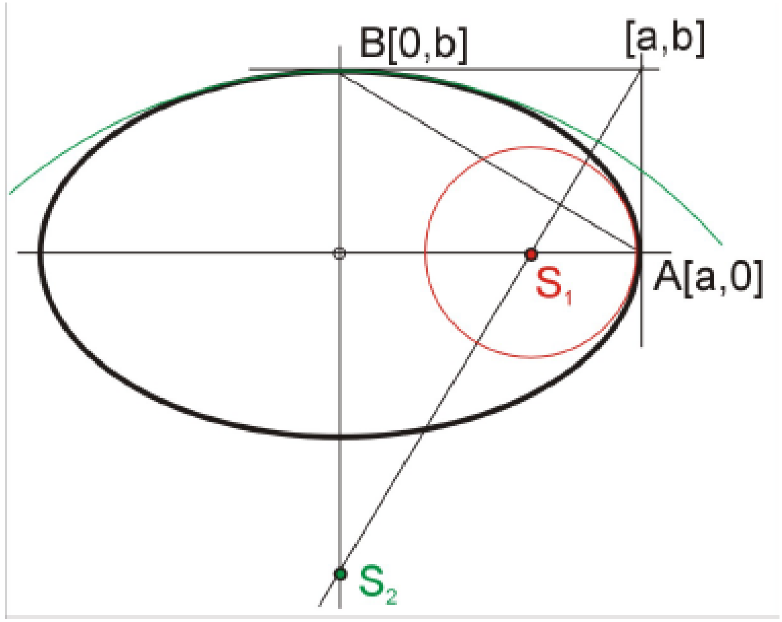
jestliže je křivka parametrizovaná obloukem

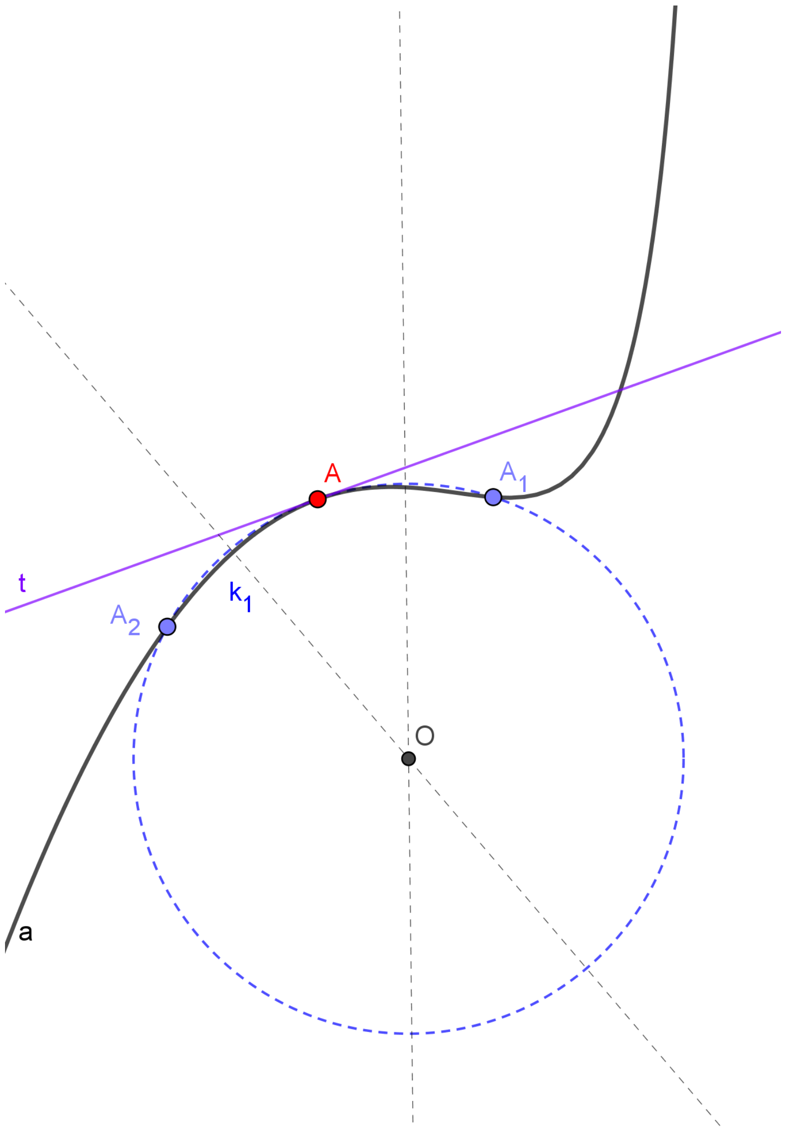
Křivost křivky

Tečna

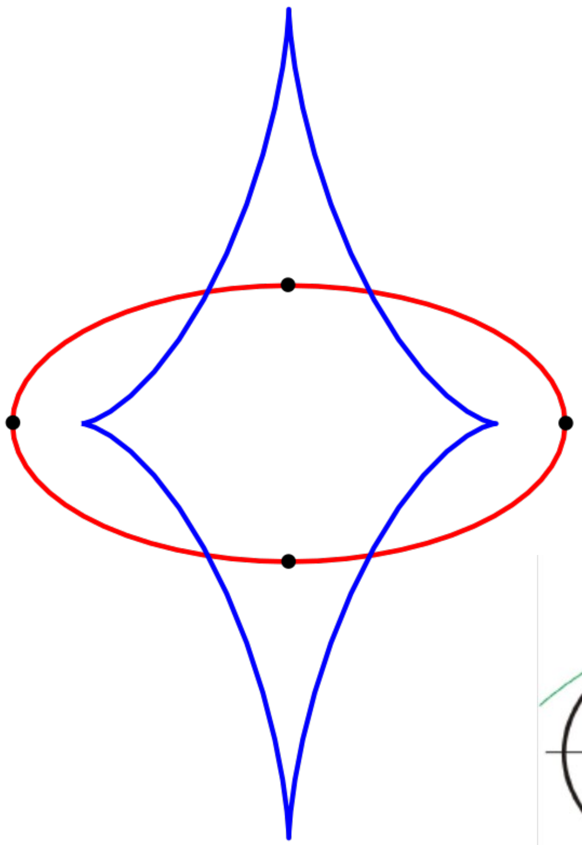
Oskulační kružnice

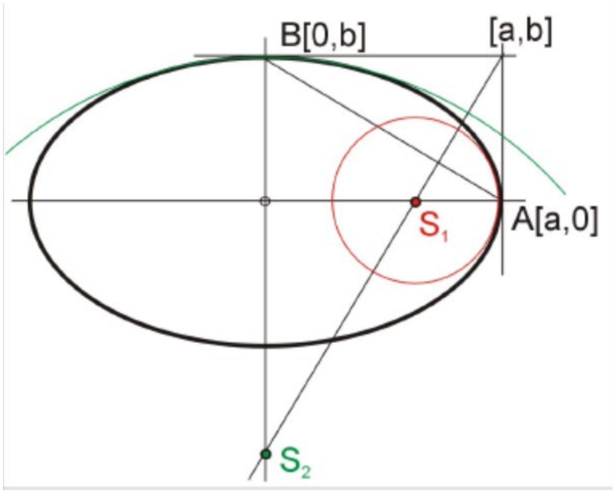
Křivost je rovna převrácené hodnotě poloměru oskulační kružnice.

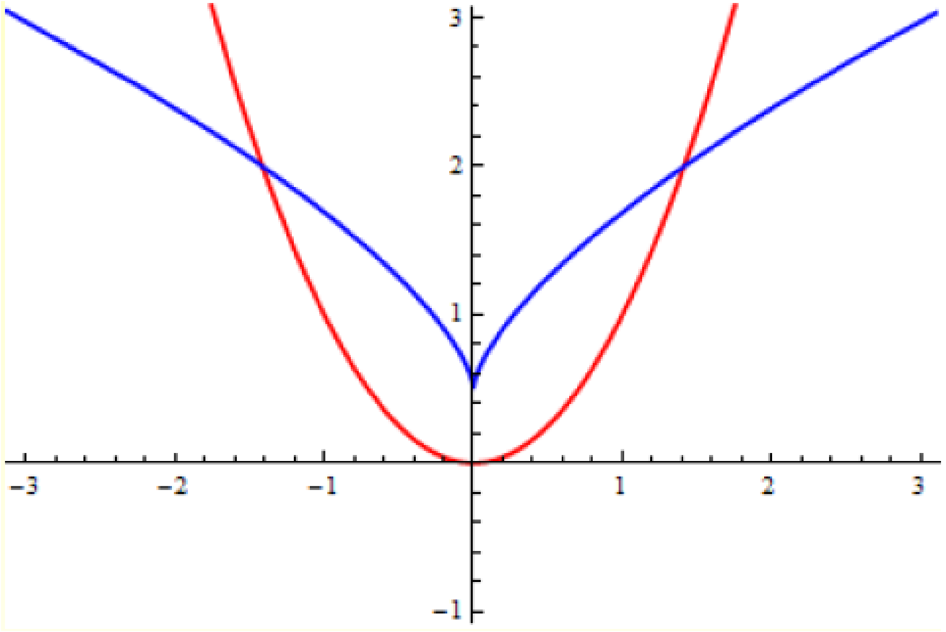




Jak vypadají křivky, které vytvoří středy křivostí (středy oskulačních kružnic)







Klotoida (Eulerova spirála)

$$x = \int_0^u \sin(u^2)\,du$$

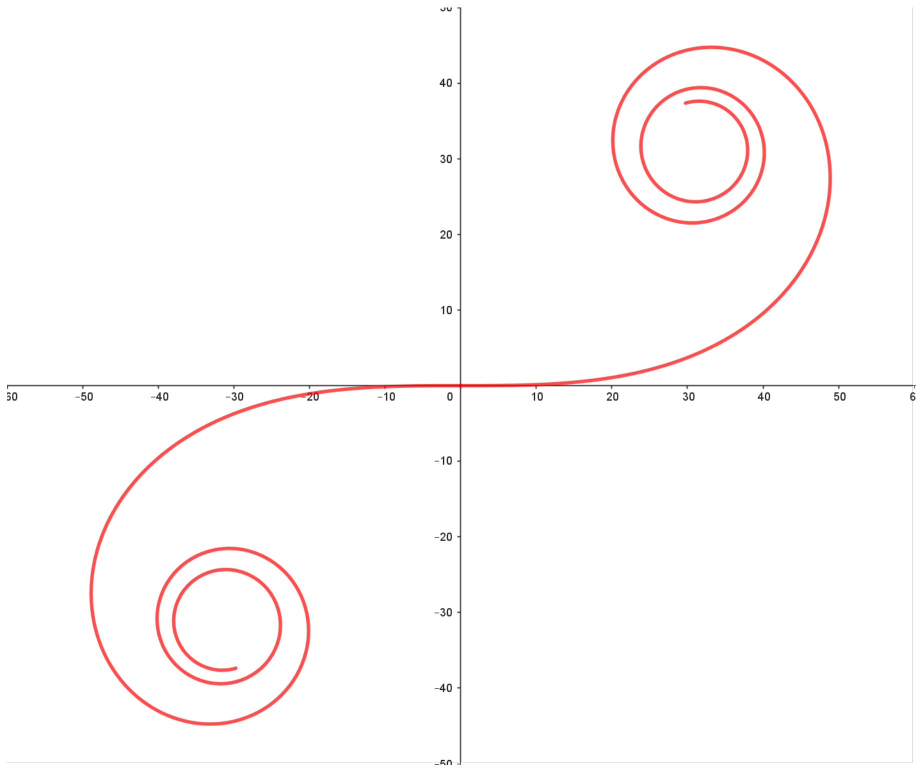
Klotoida , také Cornuova nebo Eulerova spirála, je rovinná křivka, jejíž křivost se spojitě mění s proběhnutou dráhou.

$$R = \frac{A^2}{L} \qquad y = \int_0^u \cos(u^2)\,du,$$

R poloměr křivosti

L>0 délka oblouku od počáku k danému bodu

A konstanta



https://www.geogebra.org/m/mtR9PV8R

Rovnici klotoidy poprvé napsal Jacob Bernoulli v roce 1694, ale křivku nenakreslil ani numericky nevypočítal. To udělal až roku 1734 Leonhard Euler, který na ni přišel při zkoumání spirálových pružin. 1874 ji nezávisle objevil francouzský fyzik Alfred Cornu [korny] při zkoumání a výpočtech ohybů.

Druhá křivost - torze

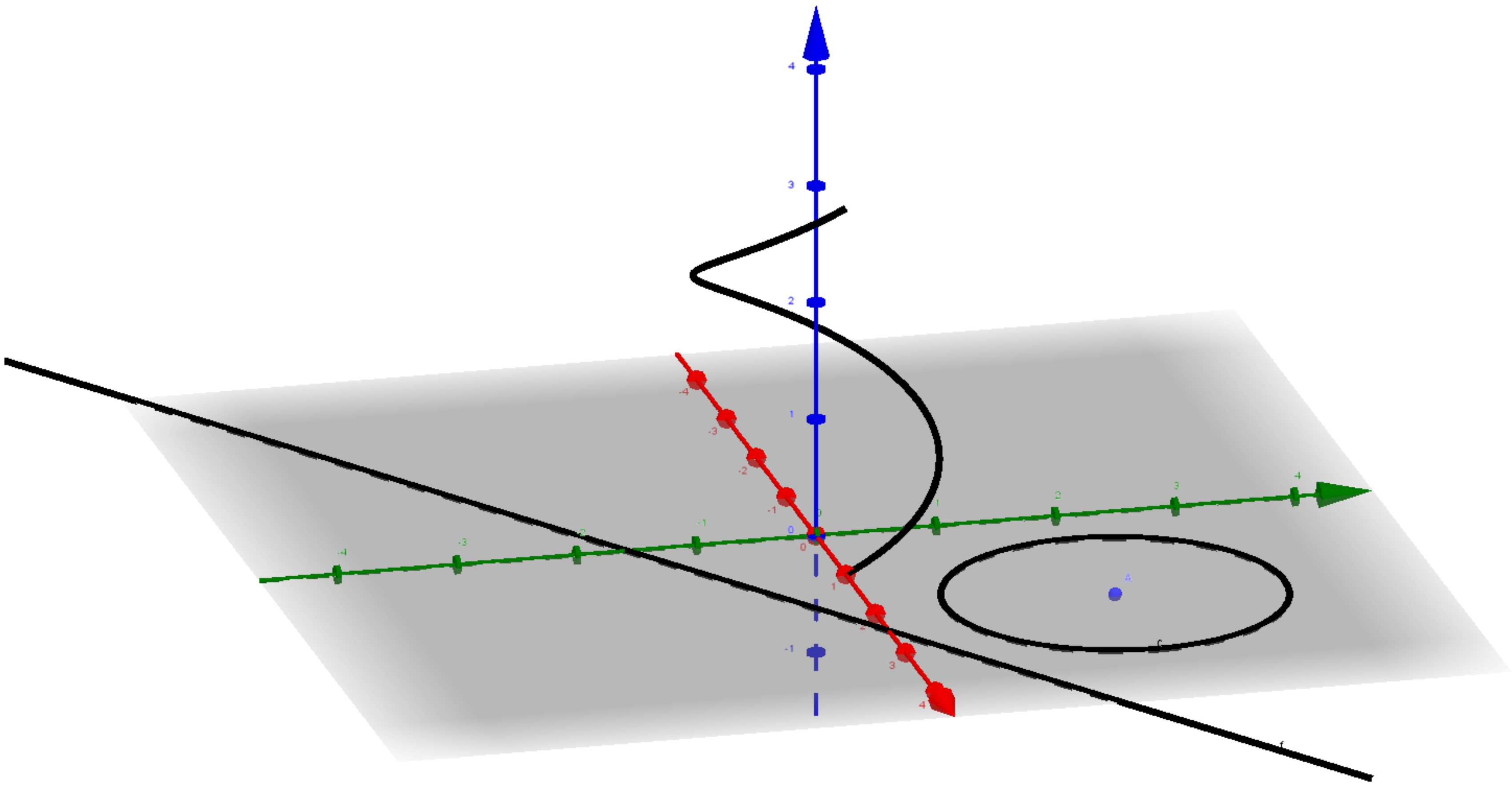
2.křivostí rozumíme číslo

$$^2k = -\dot{\boldsymbol{b}} \cdot \boldsymbol{n}$$

$$\boxed{^2k = \frac{(\boldsymbol{P}', \boldsymbol{P}'', \boldsymbol{P}''')}{(\boldsymbol{P}' \times \boldsymbol{P}'')^2}}$$

Prostorovost

Jak vypadají křivky s konstantními křivostmi



Přidáme trochu pohybu
střípky z kinematické geometrie

Základní věta kinematické geometrie v rovině

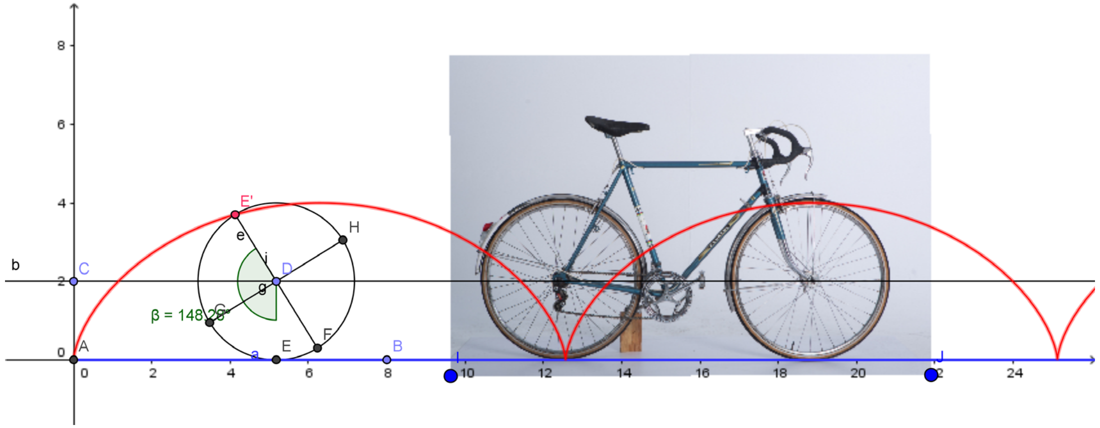
Každý pohyb (různý od rotace a translace) neproměnné rovinné soustavy lze převést na valení hybné polodie po pevné polodii.

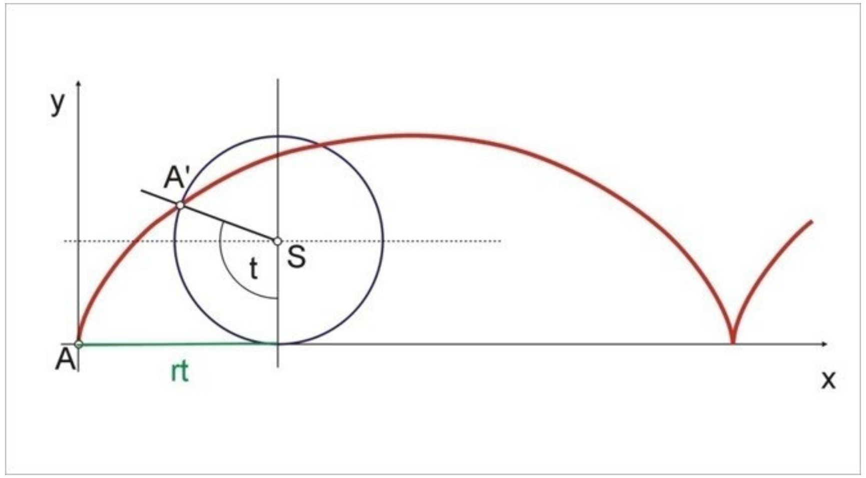
Po které křivce se kulička dostane z jednoho bodu do druhého nejrychleji?

https://www.youtube.com/watch?v=OKjUqPps8vM

soubory\Brachistochrone Demonstration.mp4

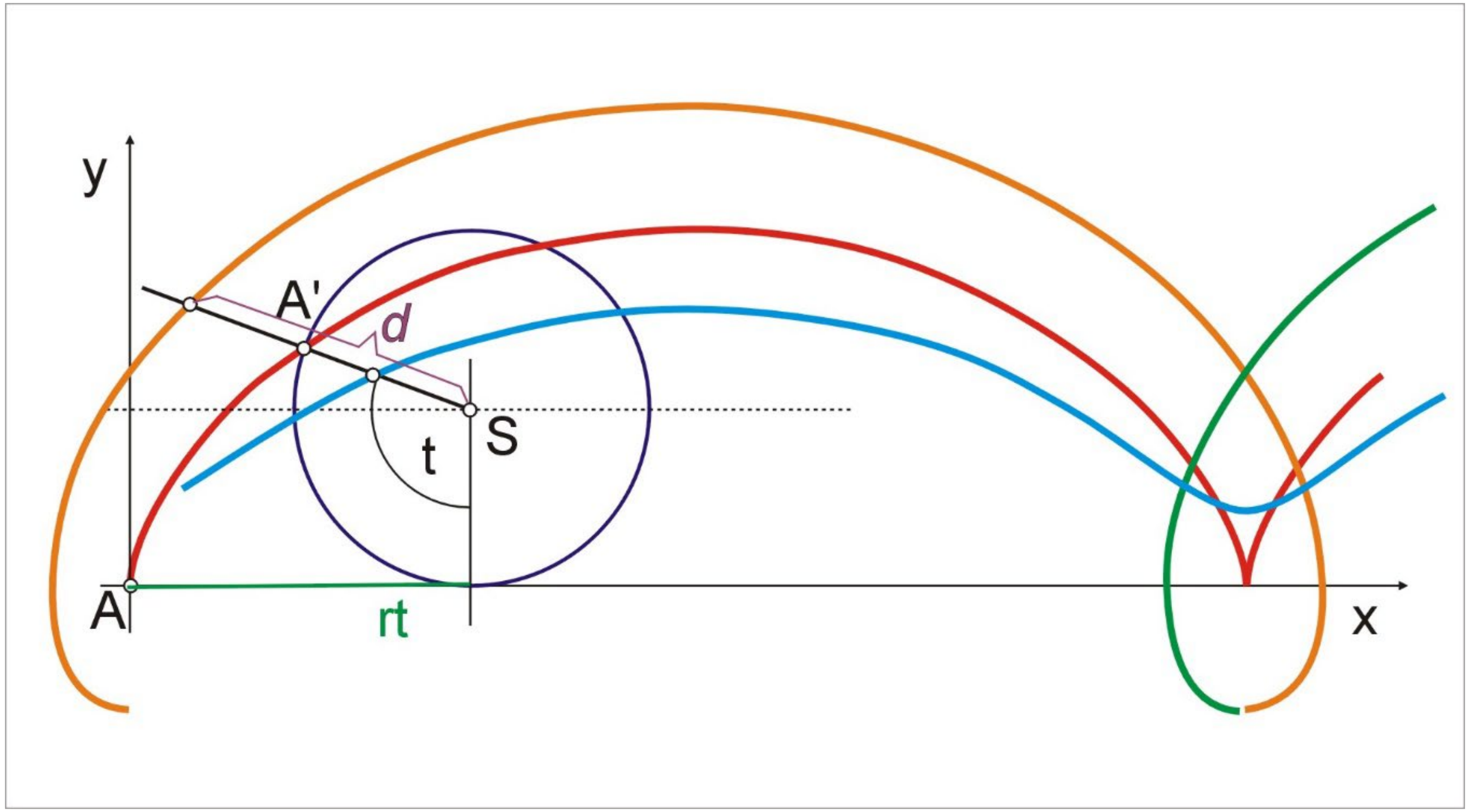
Cykloida





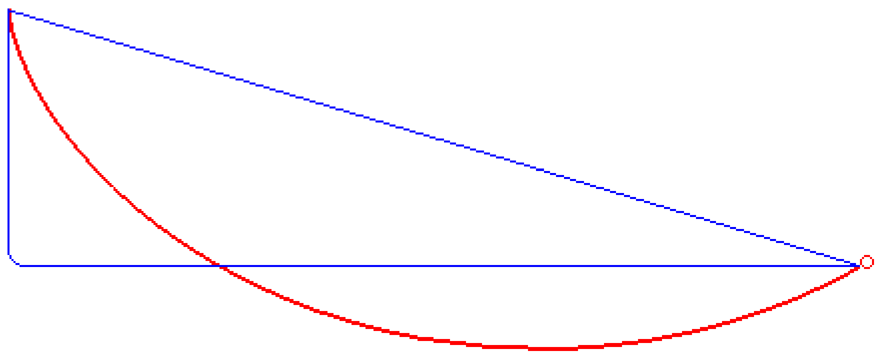
[soubory\cykloida.ggb](soubory\cykloida.ggb)

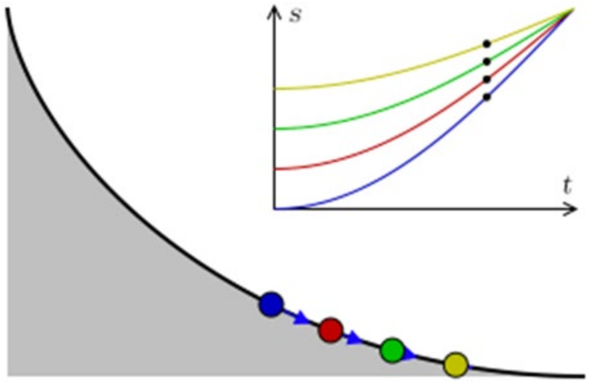
Prodloužená a zkrácená cykloida



Brachistochrona

Brachistochrona (z řeckého brachistos nejkratší, chronos čas), označovaná také jako křivka nejkratšího spádu, je křivka spojující dva body, po které se hmotný bod dostane z počátečního klidu v jednom bodě do druhého působením homogenního gravitačního pole za nejkratší dobu.





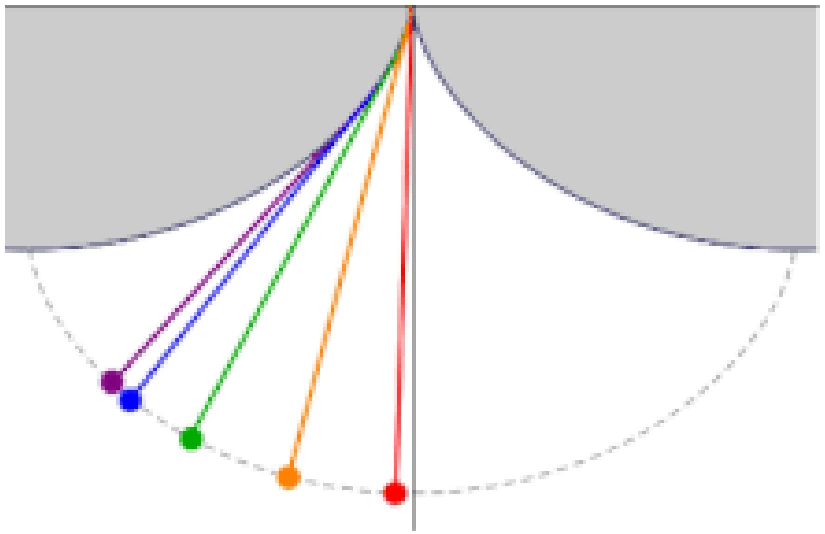
Toto označení zavedl Johann Bernoulli roku 1696 v časopise Acta Eruditorum a sám předložil řešení

Johann Bernoulli (1667 – 1748 Basilej)

byl švýcarský matematik, fyzik a lékař. Byl bratrem Jacoba Bernoulliho a otcem Daniela Bernoulliho. Zejména v oblasti matematiky dosáhl mimořádných úspěchů, byl jedním z nejvýznamnějších evropských vědců své doby a historie vůbec. Rovněž byl učitelem dalšího slavného matematika Leonharda Eulera.

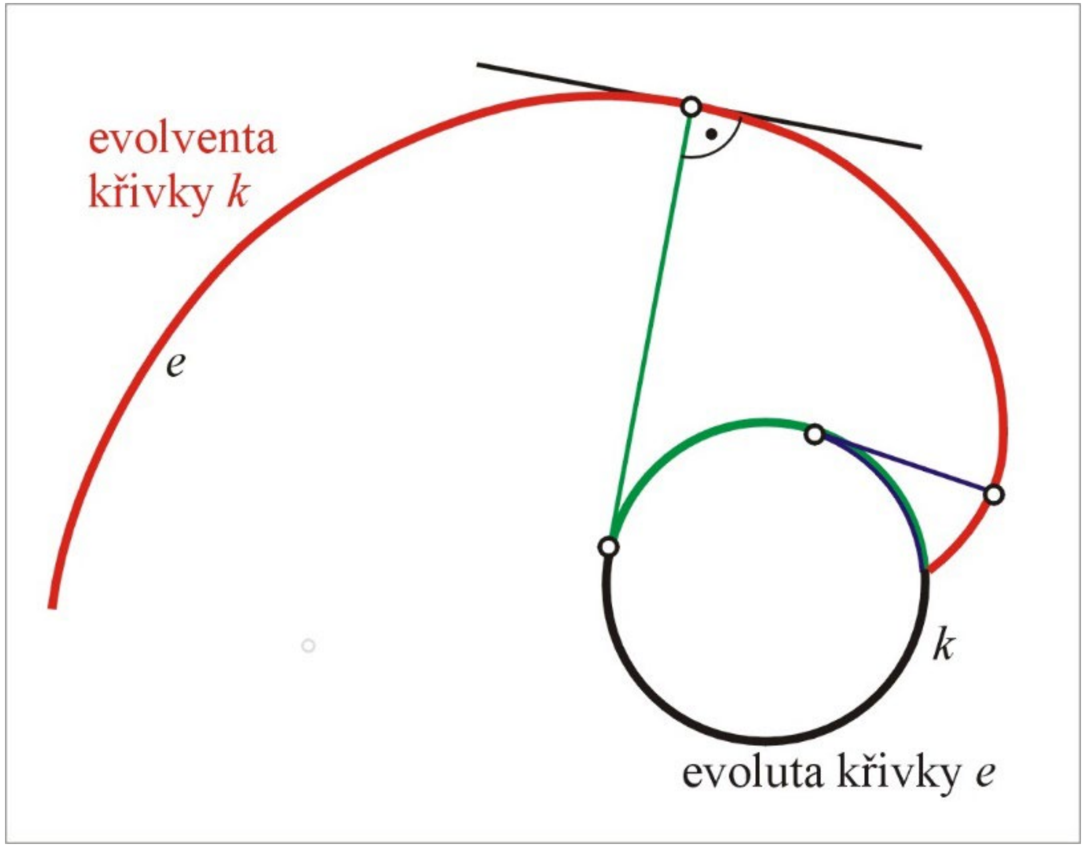
Využití cykloidy v praxi

- Izochronosti cykloidy si všiml a využil ji v 17. století Christian Huygens při konstrukci přesných hodin potřebných k tehdejšímu rozvoji mořeplavby. Potřeboval vytvořit takové kyvadlové hodiny, jejichž perioda by nezávisela na velikosti výkyvu. Zjistil, že kulička na niti musí při pohybu vykreslovat cykloidu. Aby získal požadovanou trajektorii, tj. změnu délky vlákna během pohybu, přidal horní zarážky, které mají též tvar cykloidy.



Evolventa

Vzniká odvalováním přímky po kružnici



[soubory\evolventa.mp4](soubory\evolventa.mp4)

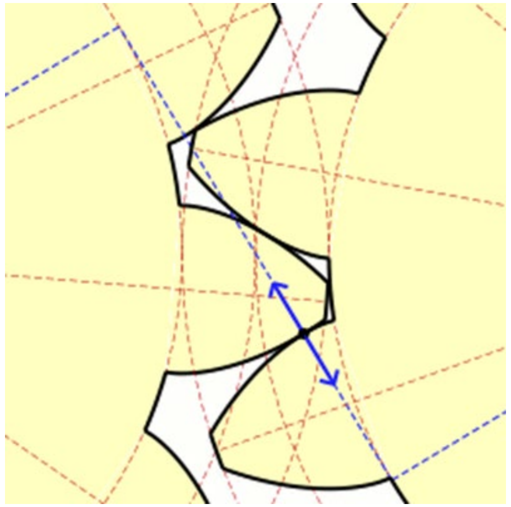
evolventa.ggb

Atletická dráha

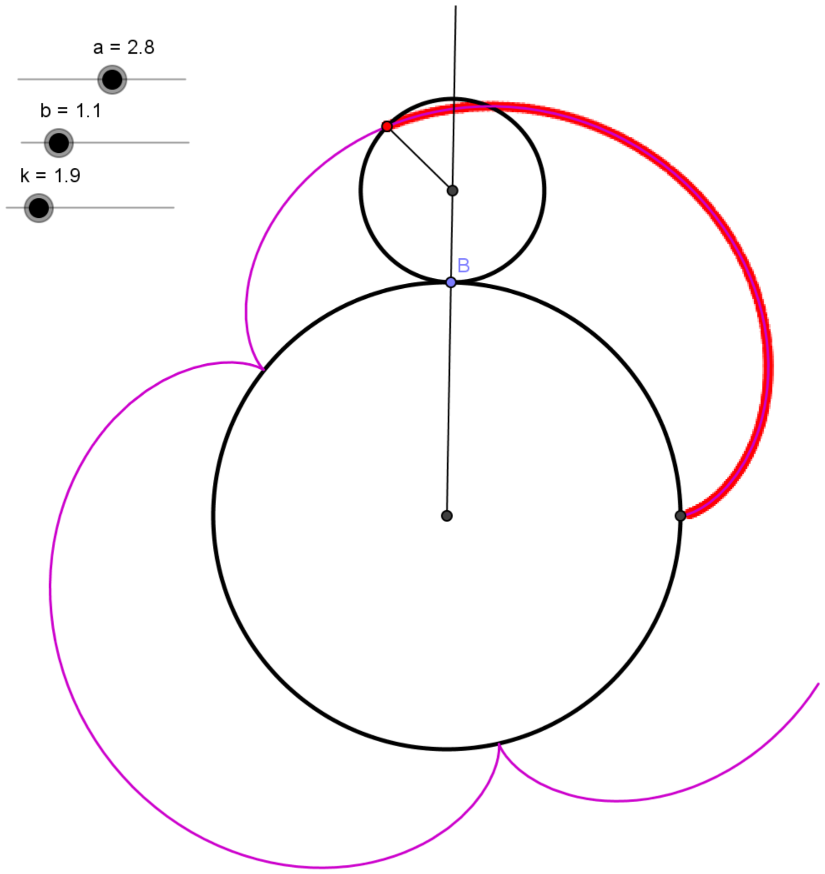
Evolventa kružnice se využívá např. při atletických závodech k rozmístění startovacích bloků.
Při běhu na 3 000 m překážek je start v místě, kde rovina přechází v zatáčku. Závodníci následně běží po tečně k vnitřnímu okraji a tím se srovná délka jejich dráhy s ostatními závodníky.

Evolventní ozubení

Při záběru dvou ozubených kol se bod, ve kterém se zuby dotýkají, pohybuje po přímce-dráze záběru, která je zároveň nositelkou přenášené síly. Kolmá vzdálenost této přímky na ose otáčení je konstantní, následkem čehož je při stejné síle mezi zuby konstantní i točivý moment přenášený ozubením. Záběr kol tak nevyvolává kolísání přenášeného momentu, které by jinak bylo zdrojem zvýšených vibrací a hluku.



Epicykloida

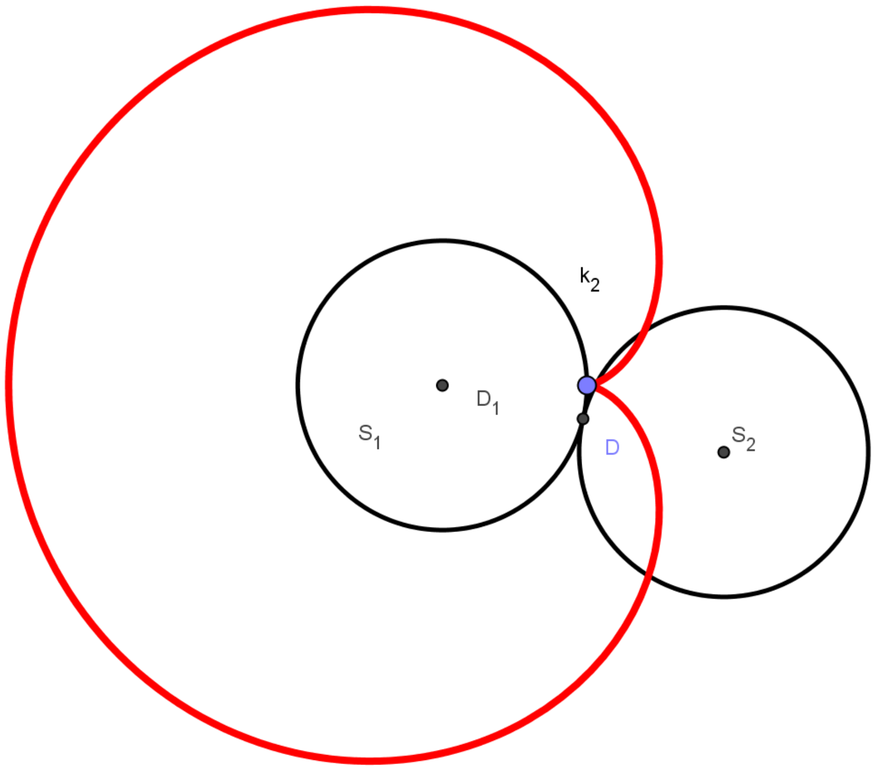


[soubory\epicykloida.ggb](soubory\epicykloida.ggb)

[soubory\epicykloida.mp4](soubory\epicykloida.mp4)

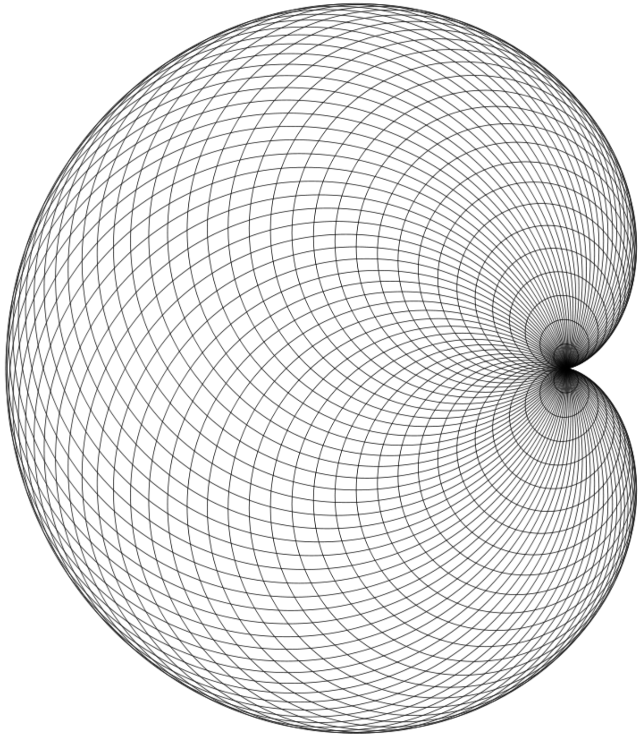
Kardioida (z řeckého καρδία – srdce) neboli srdcovka.

Kružnice mají stejné poloměry

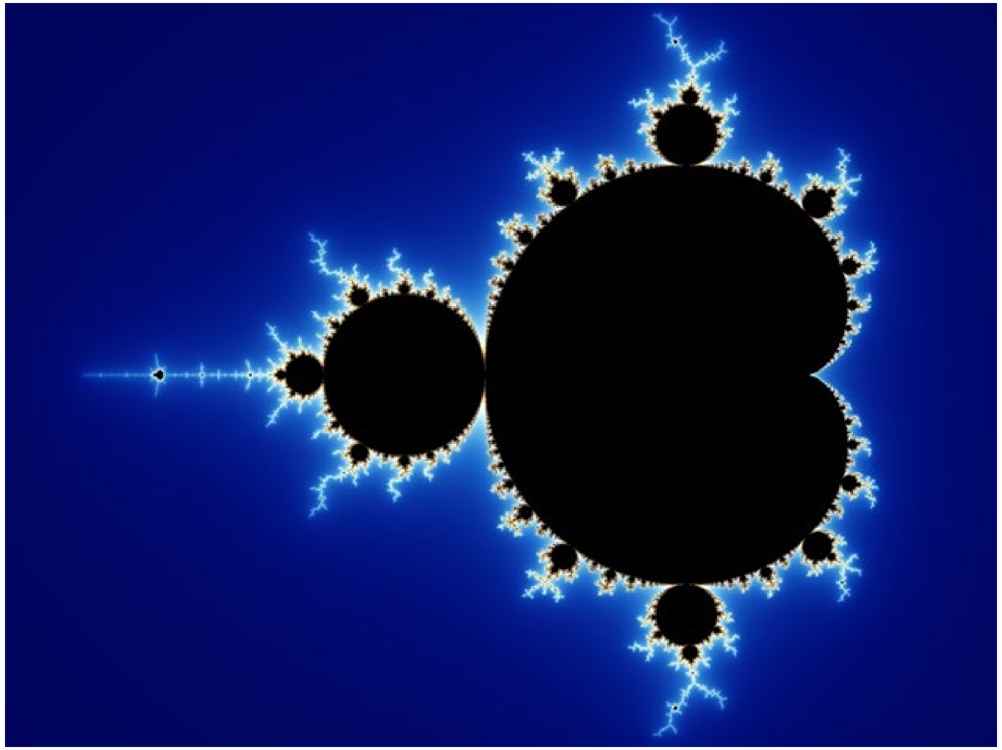


Kardioida byla studována již v 15. století dánským matematikem a astronomem Olem Christensenem Rømerem (1644 –1710) a matematikem Vaumeslem (1678). Roku 1708 francouzský matematik Philippede La Hire (1640 –1718) stanovil délku této křivky. Název kardioida („ve tvaru srdce“) byl poprvé použit matematikem Johannem Castillonem (Giovanni Francesco Salvemini Melciorre, 1704 - 1791) roku 1741.

Kardioida

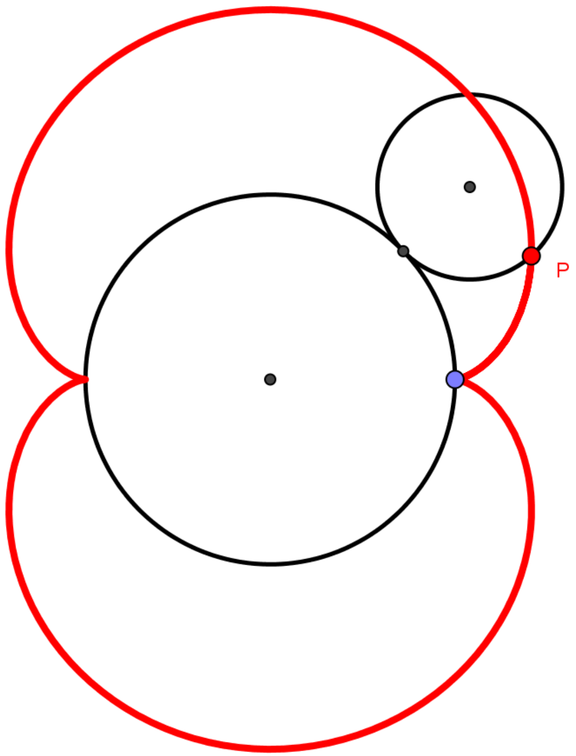


obálka kružnic



Mandelbrotova množina

Nefroida



Lze ji sestrojit jako trasu pevně daného bodu kružnice, která se kotálí kolem kružnice o dvojnásobném poloměru.

Epicykloida

Kdy bude výsledná křivka uzavřená?
Na čem to závisí?

Odpověď:

Na délce (obvodu) kružnice. $O=2\pi r$

Na poloměrech kružnic (na jejich poměru)

Ve kterých případech bude epicykloida uzavřenou křivkou
(a, b jsou poloměry kružnic)

1. $a=3$, $b=2$
2. $a=4$, $b=2$
3. $a=\pi$, $b=1$
4. $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}/2$

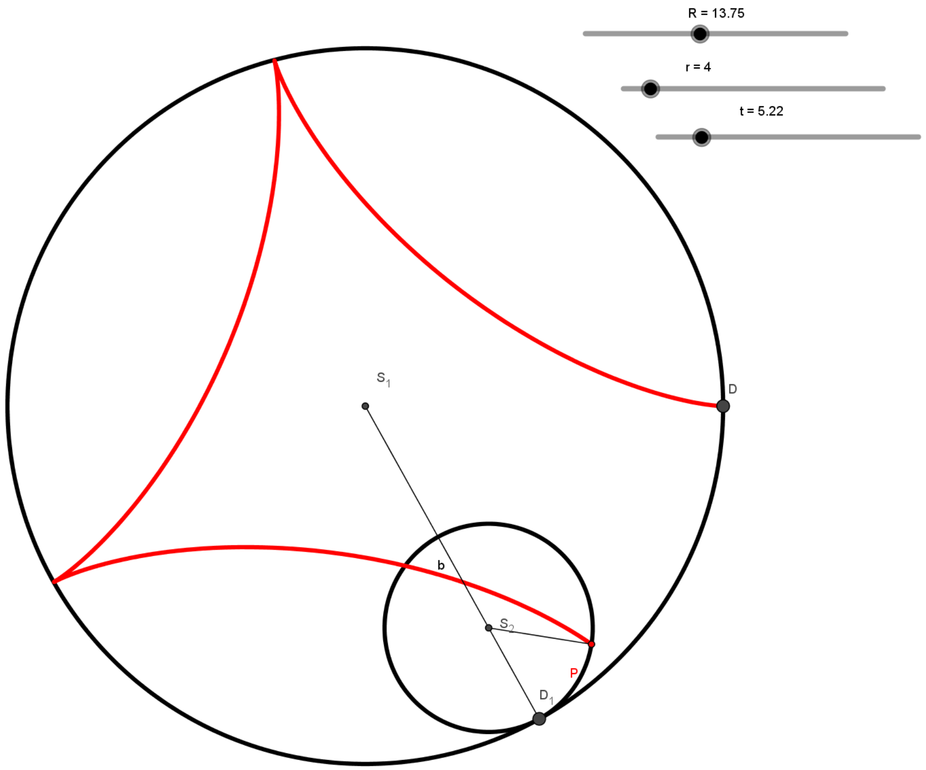
soubory\epicykloida.ggb

POMĚR a/b musí být **racionální** číslo

https://www.facebook.com/reel/249682384421313

Hypocykloida

je křivka, kterou vytvoří bod pevně spojený s kružnicí, která se valí (kutálí) po kružnici (uvnitř).

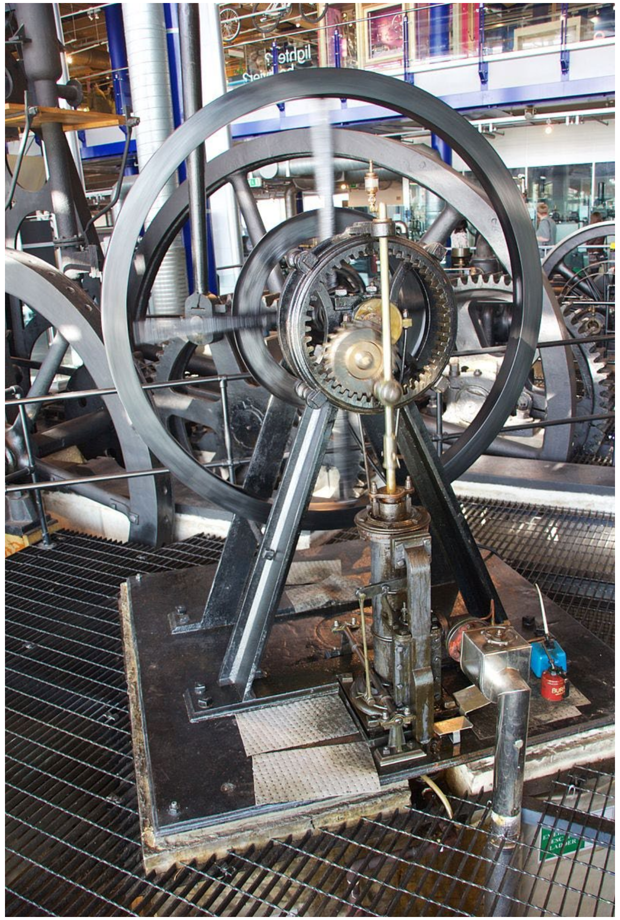


[soubory\hypocykloida.ggb](soubory\hypocykloida.ggb)

[soubory\hypocykloida.mp4](soubory\hypocykloida.mp4)

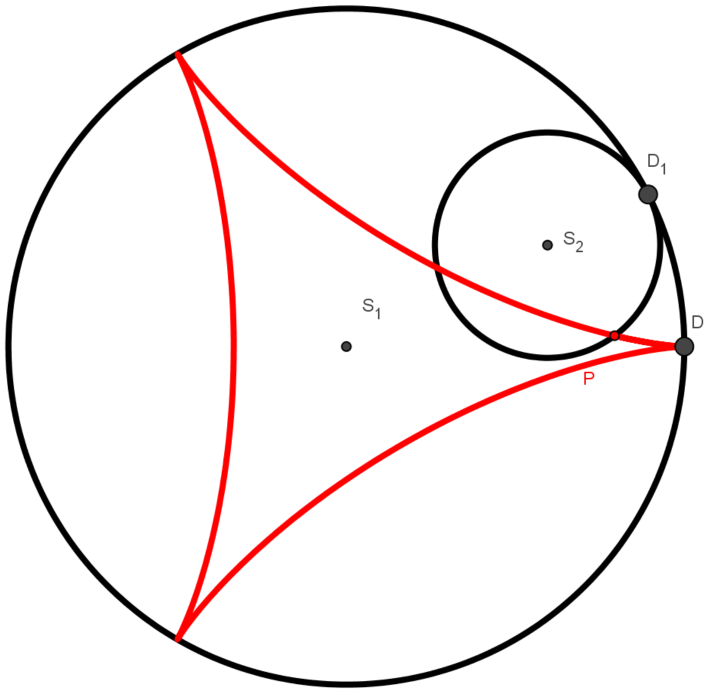
Murray's Hypocycloidal Engine

- Murrayův hypocykloidní motor, nyní v Thinktank, Birmingham Science Museum, Anglie, byl vyroben kolem roku 1805 a je třetím nejstarším fungujícím parním strojem na světě a nejstarším fungujícím motorem s hypocykloidním přímočarým mechanismem Tusi.

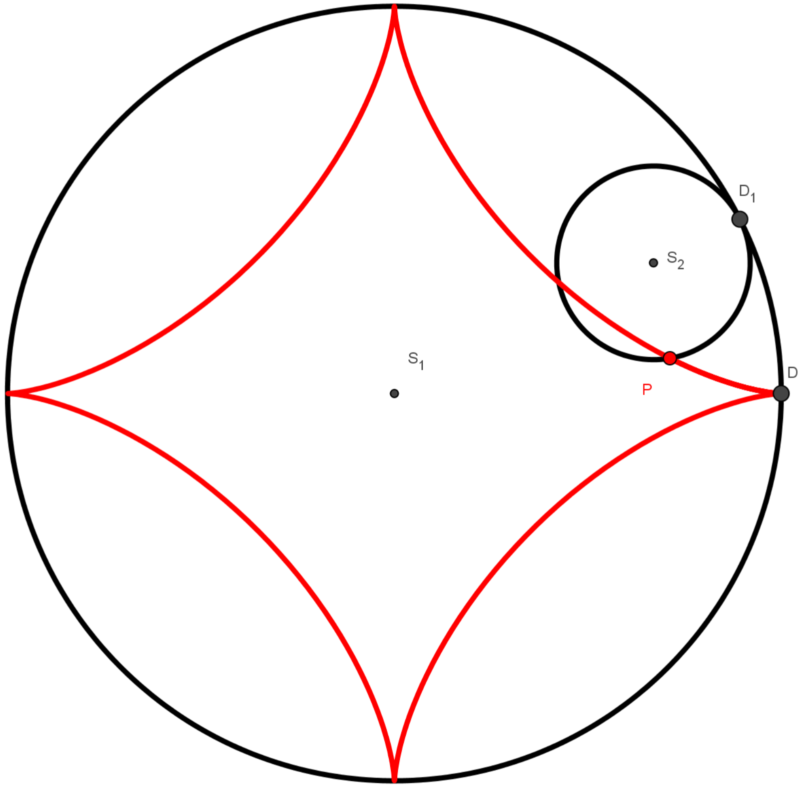


Deltoid (Steinerova hypocykloida)

Deltoid je křivka, která vznikne jako množina všech trajektorií bodu při odvalování se jedné kružnice po jiné pevné kružnici, přičemž platí a=3 b



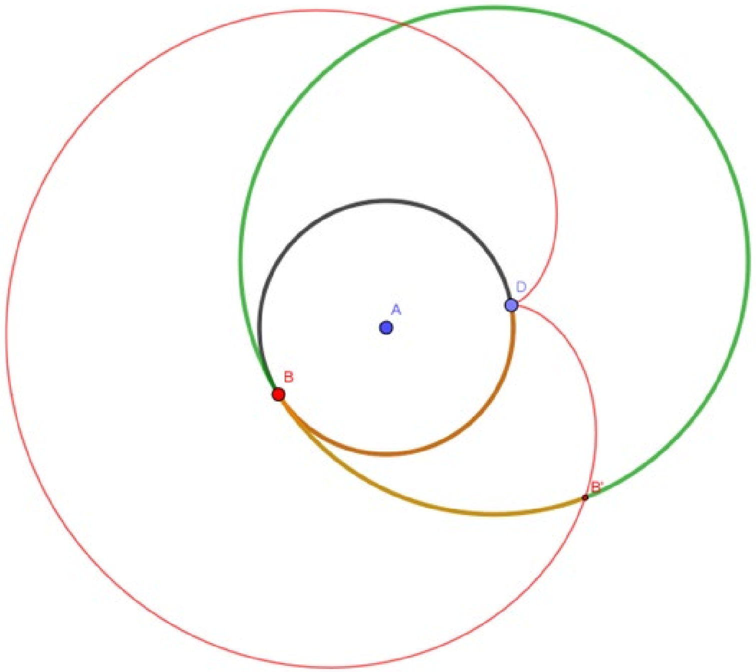
Asteroida



Asteroida patří mezi cykloidní křivky, které byly poprvé objeveny dánským astronomem Olem Christensenem Rømerem (1644 –1710) roku 1674. V letech 1691-1692 studuje asteroidu švýcarský matematik Johann Bernoulli (1667 –1748). Zmínky o této křivce můžeme také nalézt v G. W. von Leibnizově(1646 –1716) korespondenci z roku 1715. Název asteroida byl v literatuře poprvé použit roku 1836.

Pericykloida

kružnice valící se svou vnitřní stranou po vnější straně pevné kružnice

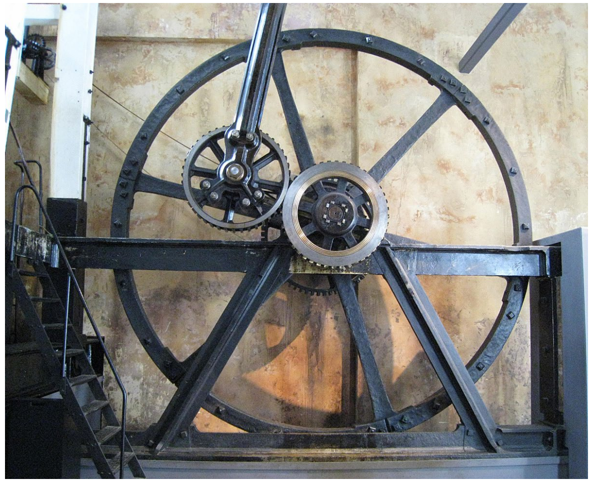


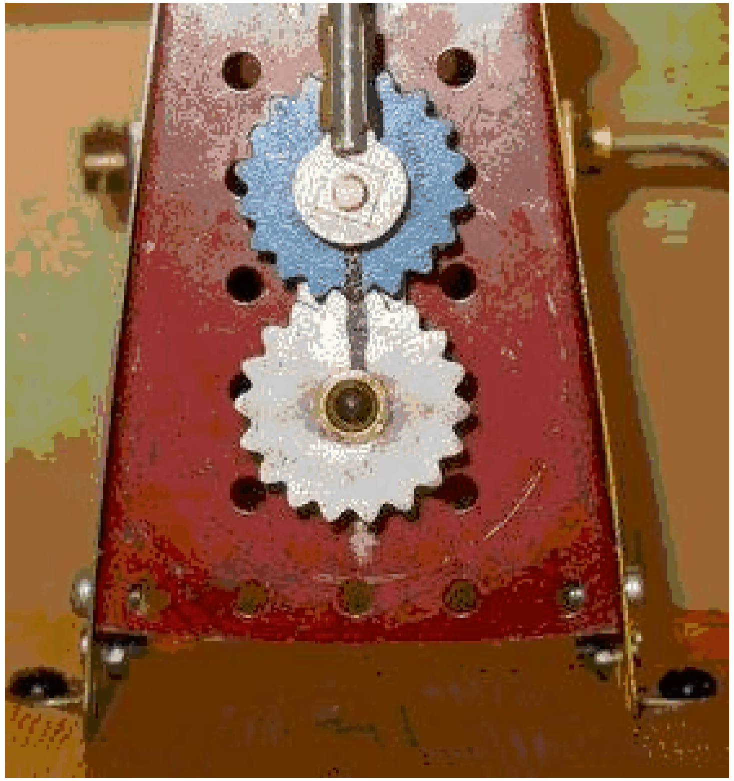
soubory\pericykloida.ggb

https://www.geogebra.org/m/kCsKGQDn#material/Yq2cpKza

Sluneční a planetové kolo

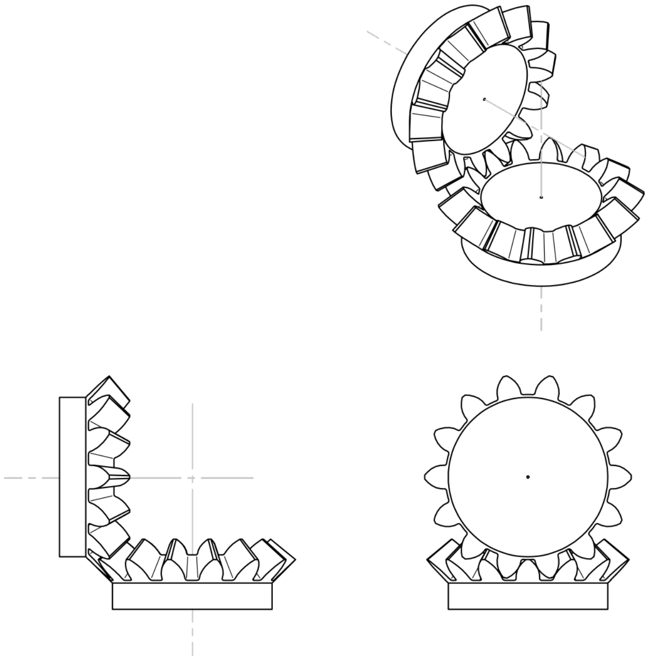
- Sluneční a planetové kolo je metoda přeměny vratného pohybu na rotační pohyb a byla použita v prvních motorech s rotačním paprskem.





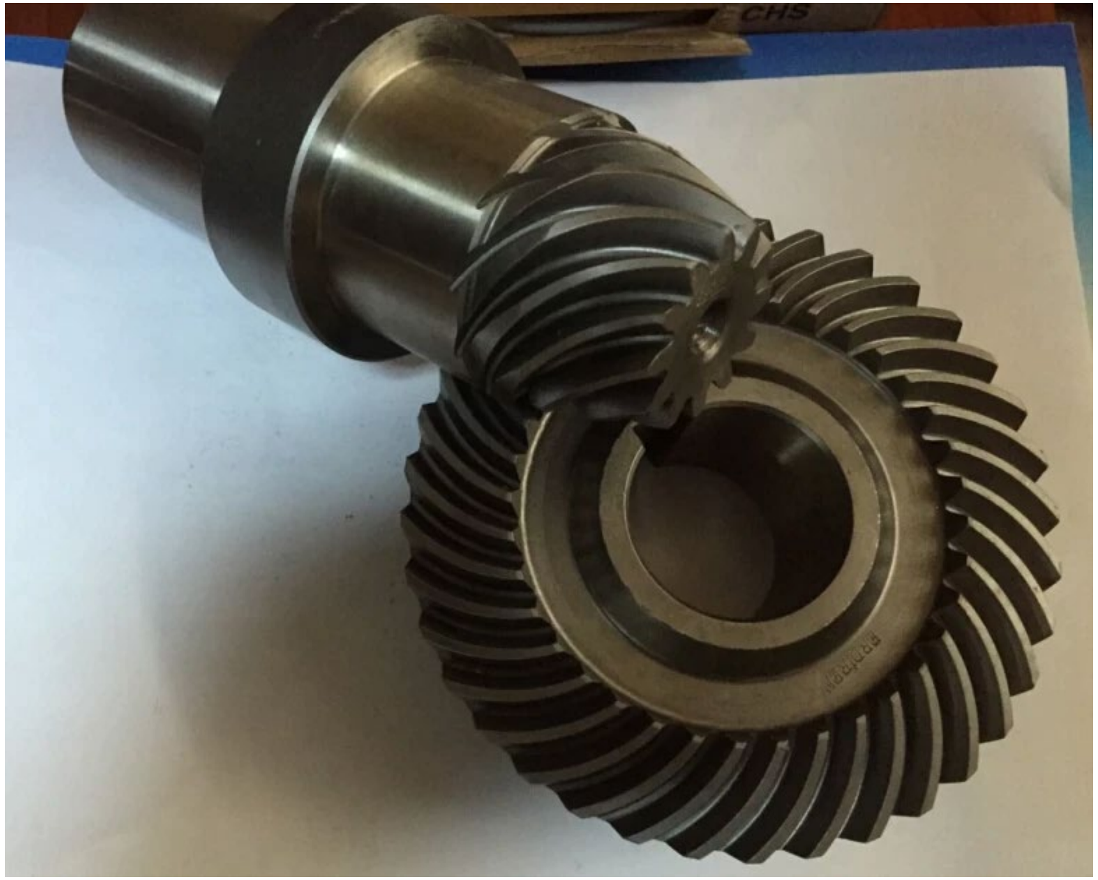
Kuželová ozubená kola

Kuželová kola jsou ozubená kola, kde se osy dvou hřídelů protínají a čela ložiska zubů samotných ozubených kol jsou kónicky tvarována.



Spiral bevel gear

Hypoid bevel gears



Křivky vzniklé valením jedné po druhé (Vojtěch Ouda)

Co vznikne:

1. Valíme elipsu po elipse (shodné, vrchol na vrchol), jakou křivku vytvoří ohnisko valené elipsy.
2. Valíme parabolu po parabole (shodné, vrchol na vrchol), jakou křivku vytvoří ohnisko a jakou vrchol valené paraboly.
3. Valíme parabolu po přímce, jakou křivku vytvoří ohnisko paraboly.

soubory\kružnice_po_parabole.ggb

soubory\elipticka_retezovka.ggb

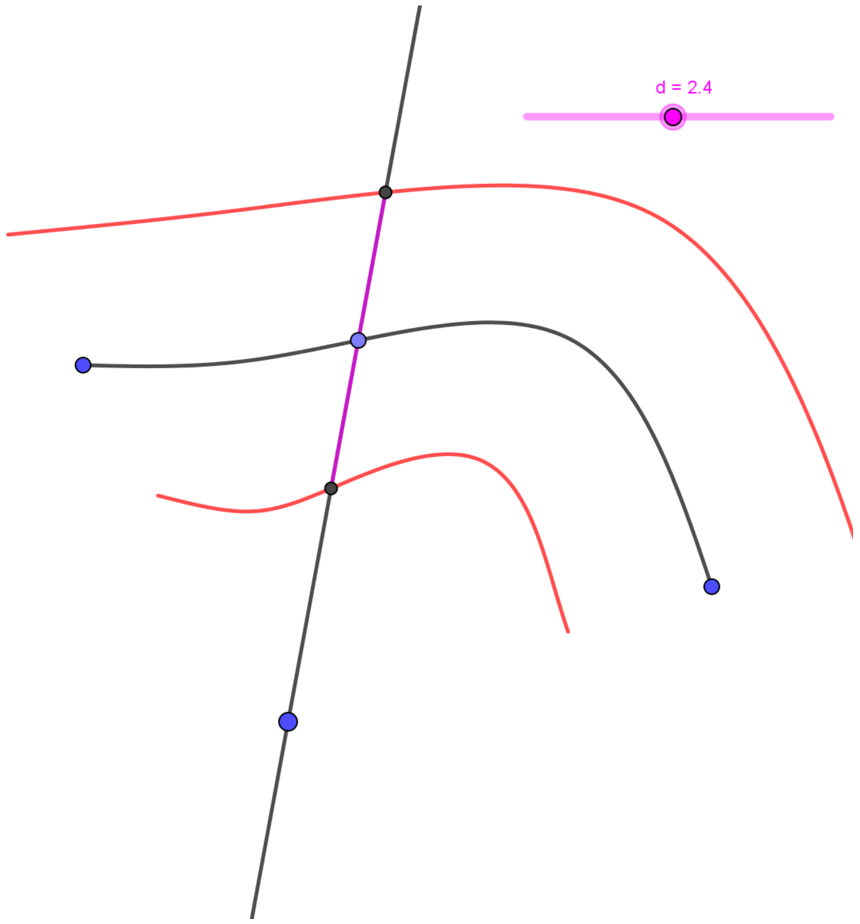
soubory\elipsa_po_elipse.ggb

soubory\kisoida.ggb

soubory\retezovka.ggb

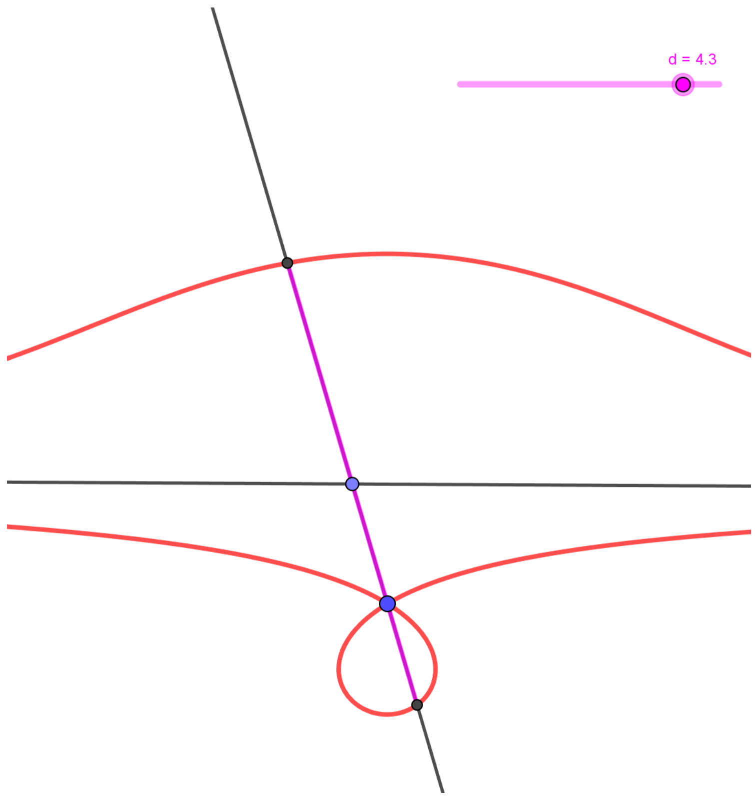
Konchoidální pohyb

- Přímá konchoida je křivka určená pevným bodem, křivkou a vzdáleností d. Přímka m prochází pevným bodem P (pólem) a bod Q přímky opisuje trajektorii určenou křivkou q (řídicí křivka). Trajektorie pohybu se nazývá přímá konchoida (tvořící bod je na m), šikmá pokud tvořící bod neleží na m.



[soubory\konchoida.ggb](soubory\konchoida.ggb)

Nikomedova konchoida



[soubory\konchoida Nikomedesa.mp4](soubory\konchoida Nikomedesa.mp4)

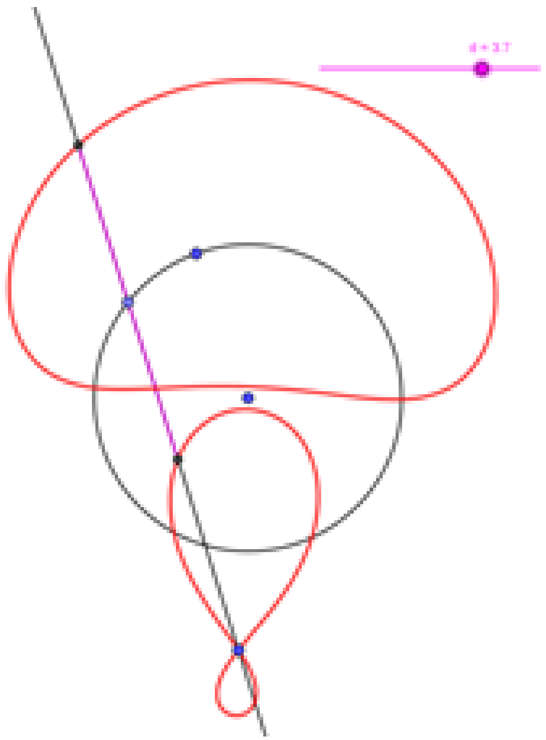
[soubory\nikomedova_konchoida.ggb](soubory\nikomedova_konchoida.ggb)

Nicomedes (asi 280 –210 BC)

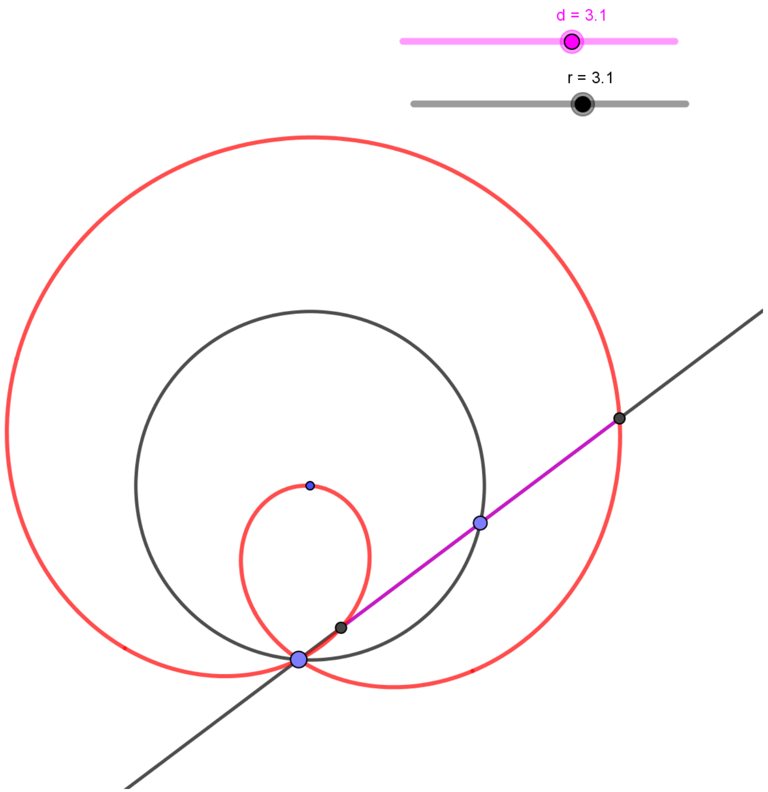
Snažil se řešit zdvojení krychle a trisekci úhlu.
Je známo, že žil kolem Eratosthenesovy doby nebo později, protože kritizoval Eratosthenesovu metodu zdvojnásobení krychle.

Je také známo, že Apollonius z Pergy nazval křivku „sestrou conchoid“, což naznačuje, že ji pojmenoval podle už známé Nicomedesovy křivky. V důsledku toho se věří, že Nicomedes žil po Eratosthenesovi a před Apolloniem z Pergy.

Pascalova závitnice



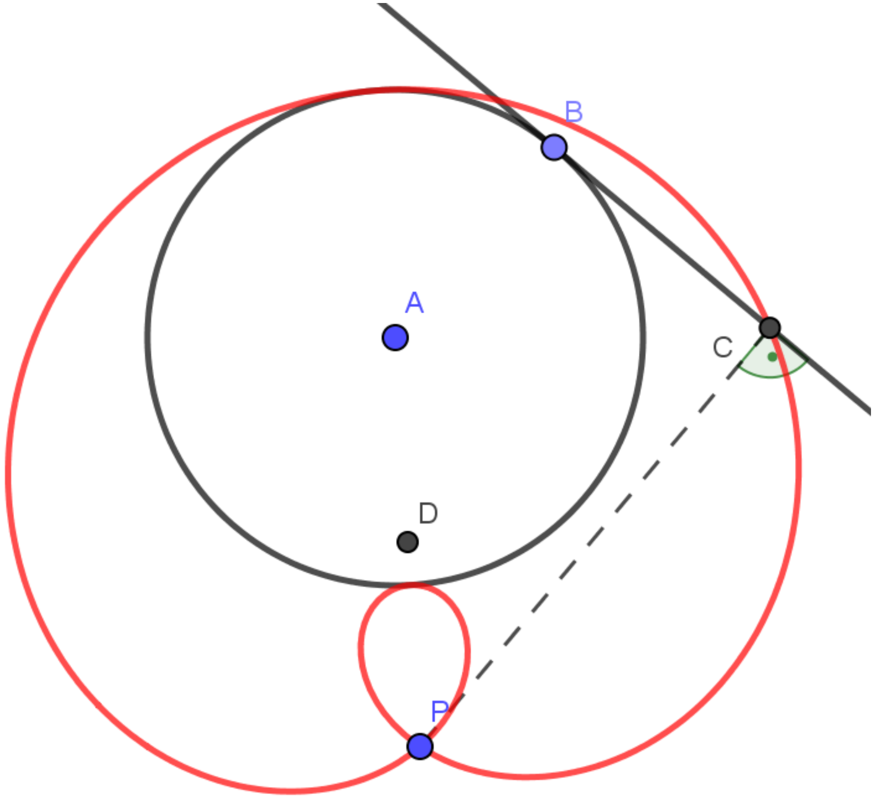
[soubory\konchoida_kruz.ggb](soubory\konchoida_kruz.ggb)



[soubory\pascalova_zavitnice.ggb](soubory\pascalova_zavitnice.ggb)

Úpatnice

- Úpatnice bodu P vzhledem ke křivce k je množina všech pat kolmic spuštěných z bodu P na tečny křivky k.
- Úpatnicí kružnice je Pascalova závitnice

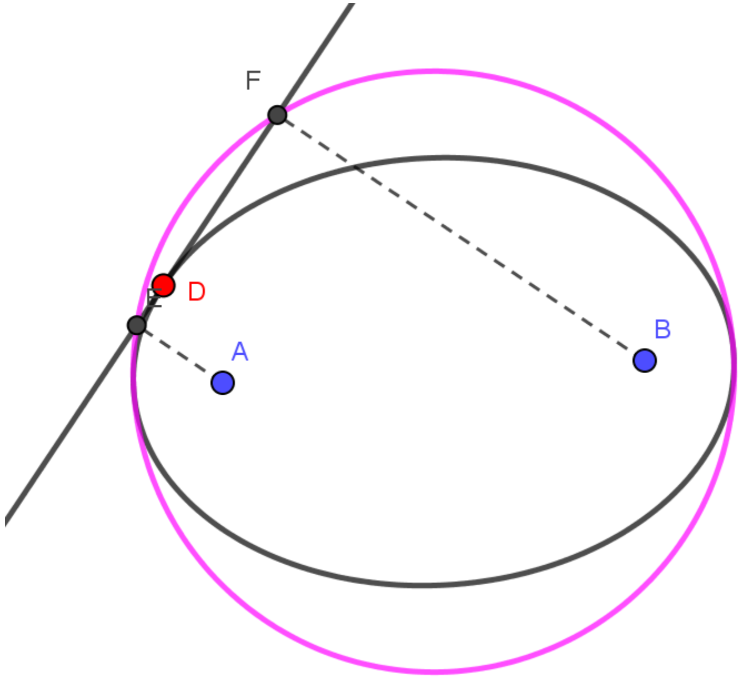


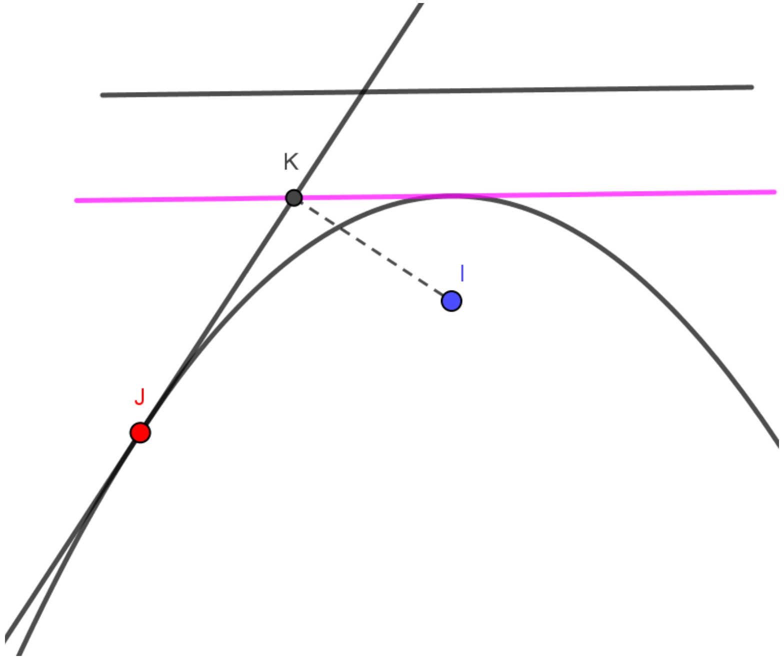
soubory\úpatnice_kružnice.ggb

Úpatnice kuželoseček

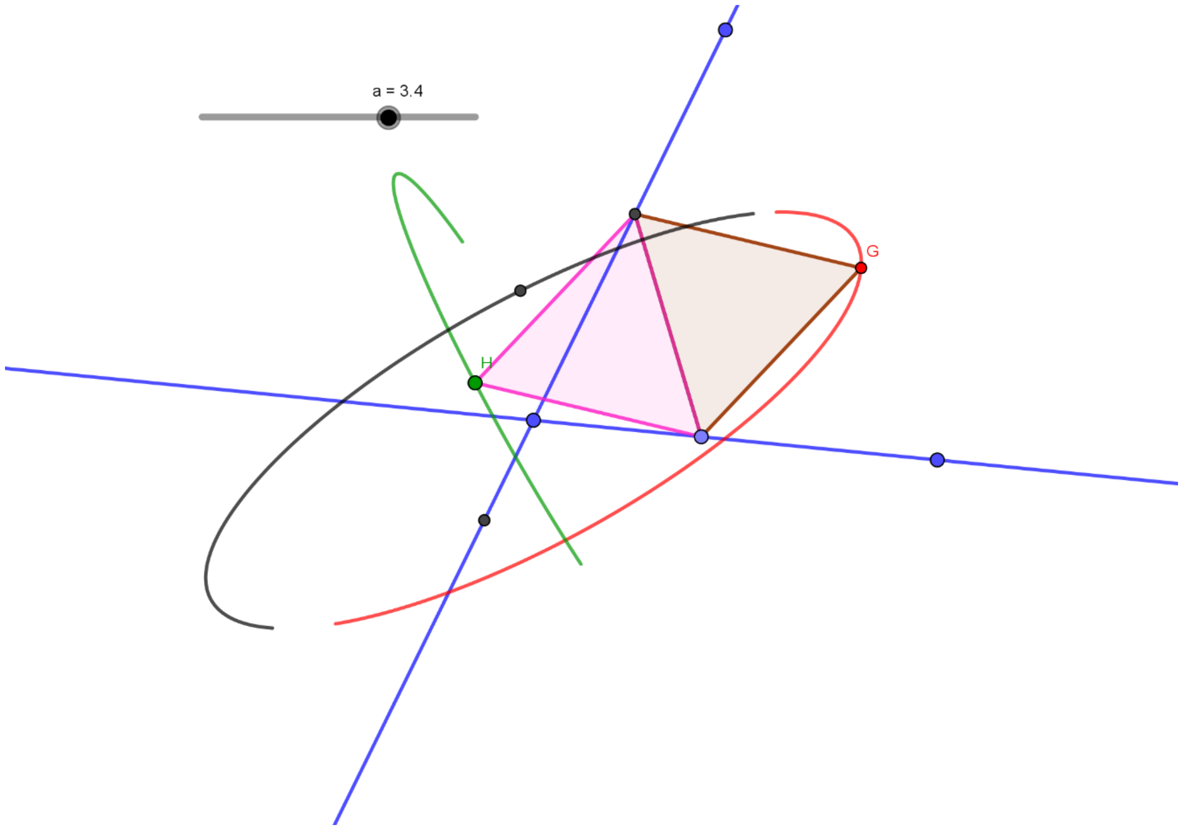
- Vrcholová kružnice pro elipsu a hyperbolu
- Vrcholová přímka pro parabolu
- Pólem je ohnisko kuželosečky

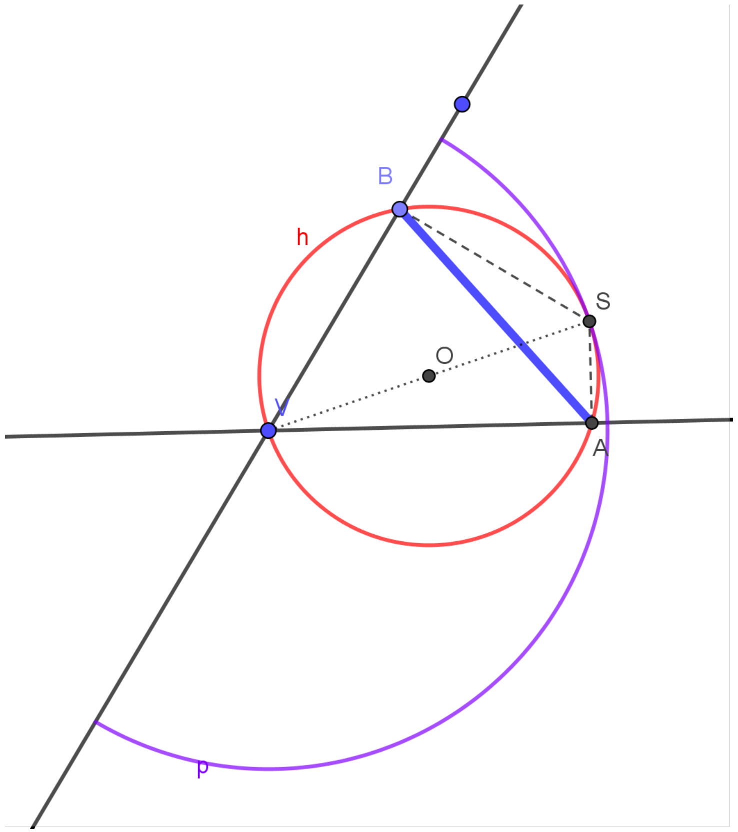
[soubory\úpatnice_kuzelosecek.ggb](soubory\úpatnice_kuzelosecek.ggb)





Eliptický pohyb



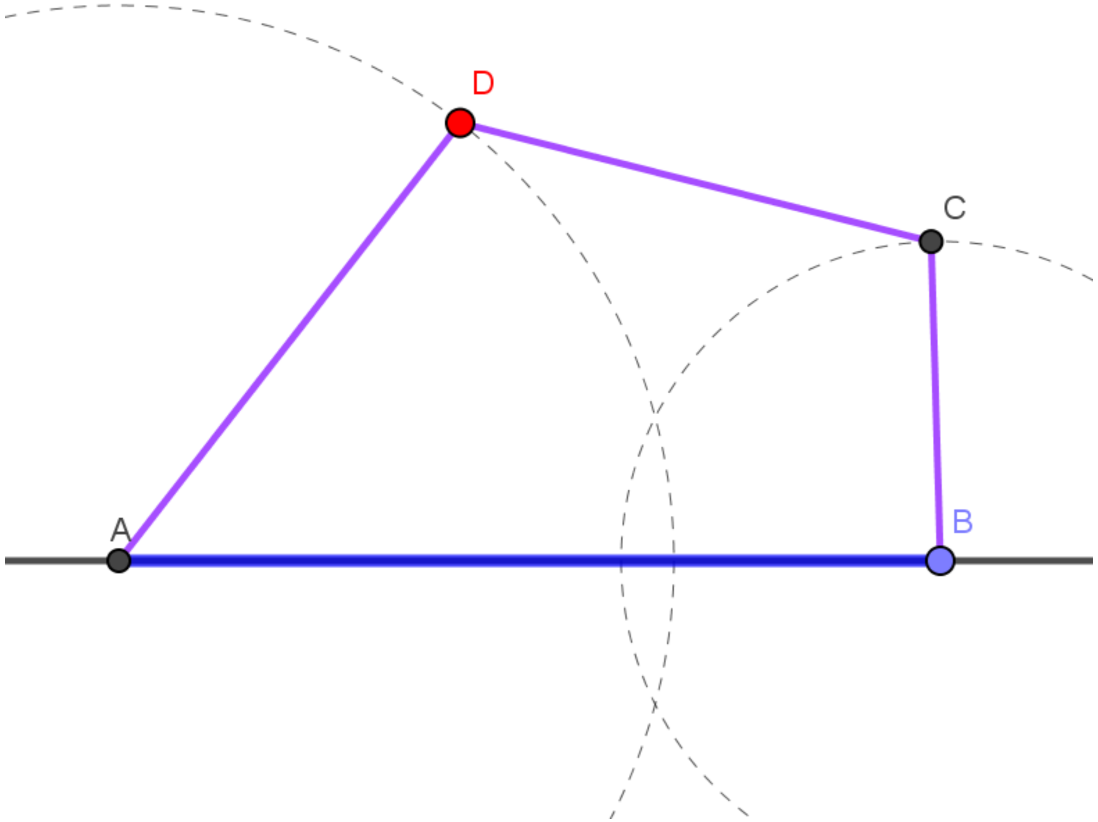


soubory\elipticky_pohyb.ggb

elipticky_pohyb_polodie.ggb

Kloubový čtyřúhelník

- Úsečka AB je pevná (rám)
- Strany AD, BC (kliky – body C, D opisují kružnice), (vahadla – body C, D opisují oblouky kružnic)
- Strana CD (ojnice)

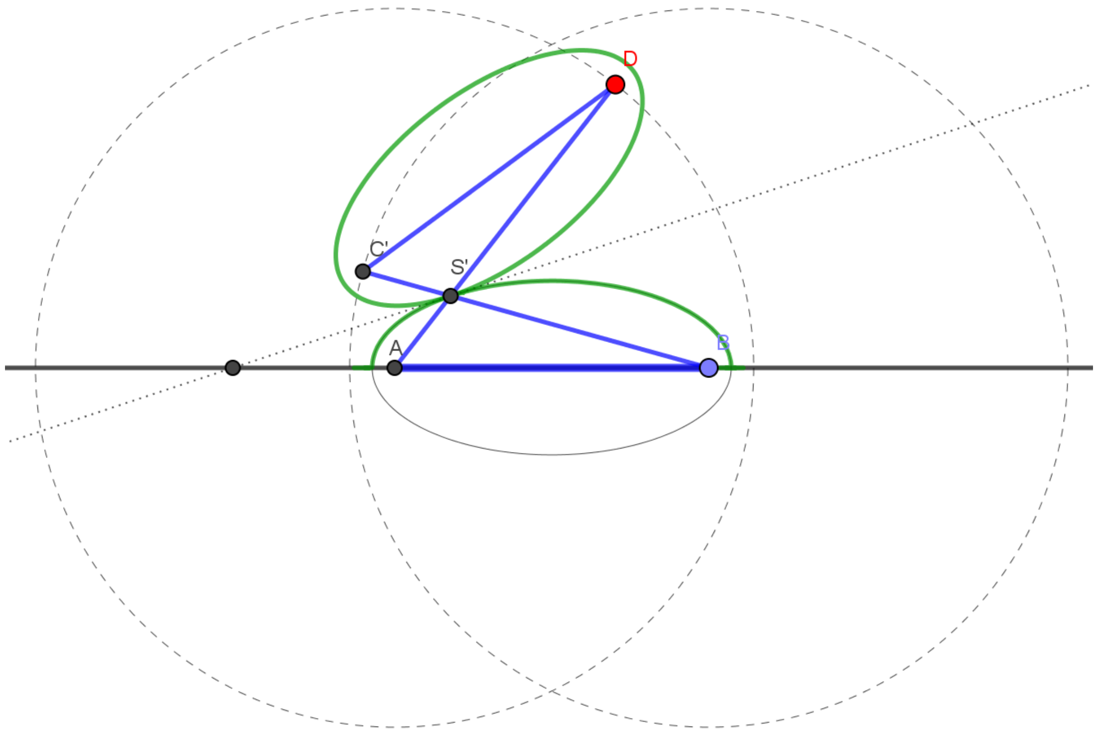


Wattova křivka https://www.geogebra.org/m/gNh4bW9r

Kloubový antiparalelogram

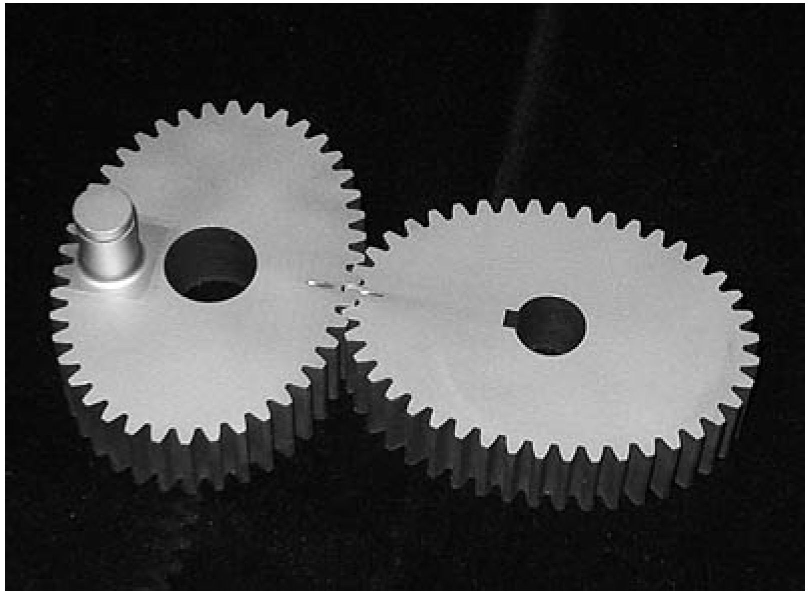
- Zkřížený kloubový čtyřúhelník, pro který AB=CD a AD=BC,
- jestliže AB=CD a AB<AD polodie jsou elipsy,
- jestliže AB=CD a AB>AD polodie jsou hyperboly.

[soubory\antiparalelogram.ggb](soubory\antiparalelogram.ggb)



Eliptické ozubení

- Rychlostní poměr vyplývající z eliptických převodů se pohybuje mezi 1/K a K během jednoho cyklu změny rychlosti, kde K je maximální převodový poměr. Vícelaloková ozubená kola lze odvodit z jednolalokových ozubených kol. Ve vhodných situacích mohou být eliptická ozubená kola řazena do kaskády, aby se dosáhlo měnících se charakteristik změny rychlosti, což dává efektivní poměr od 1 do K^2. Bilobe ozubená kola (oválová kola) se používají v průtokoměrech a čerpadlech. Pomocí přesných eliptických dvoulaločných převodů mohou mít průtokoměry dobrou linearitu v širokém rozsahu průtoků a viskozit



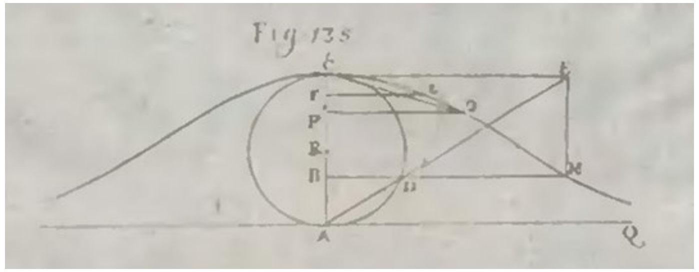
optimalizace tvaru převodníků

Kvíz

Které z následujících názvů jsou jména křivek?

1. Agnesiina čarodějnice
2. Bernoulliho lemniskata
3. Descartův list
4. Cassiniho ovál
5. Pericykloida
6. Lituuova spirála
7. Dioklova kisoida
8. Hippiova kvadratri
9. Strofoida
10. Úpatnice
11. Archimédova serpentina
12. Klotoida
13. Loxia curvirostra

Agnesiina čarodějnice (Witch of Agnesi)

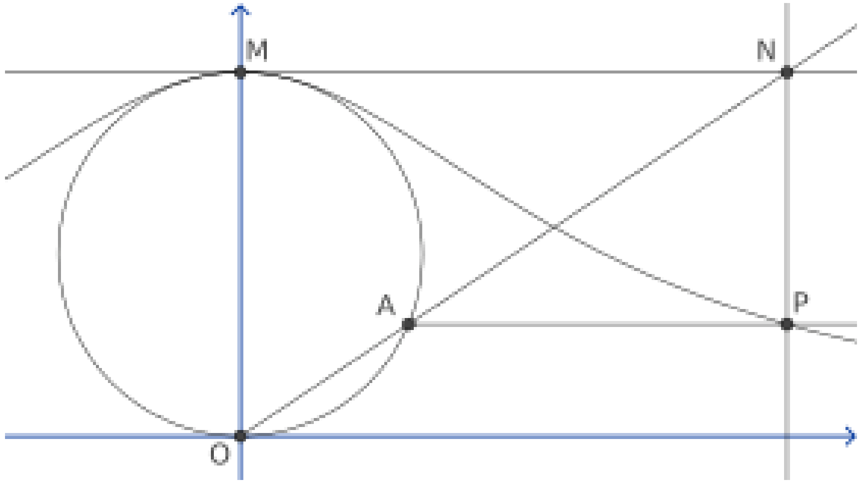


Maria Gaetana Agnesi (1718- 1799)

byla italská matematička a filozofka

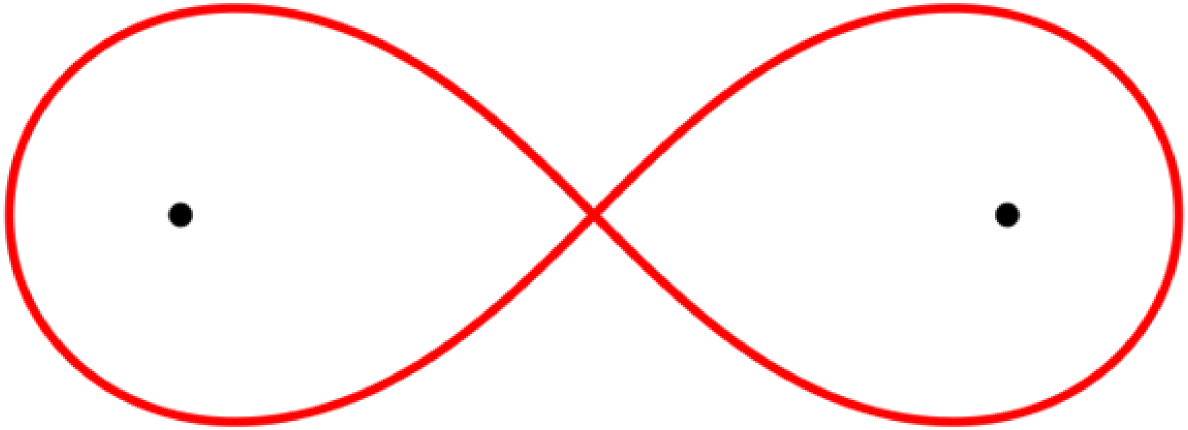
Roku 1750 ji papež Benedikt XIV. jmenoval profesorkou matematiky a přírodní filozofie univerzity v Bologni, jakožto druhou ženu v historii

Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana, první kniha, v níž se diskutovalo jak o integrálním, tak diferenciálním počtu.

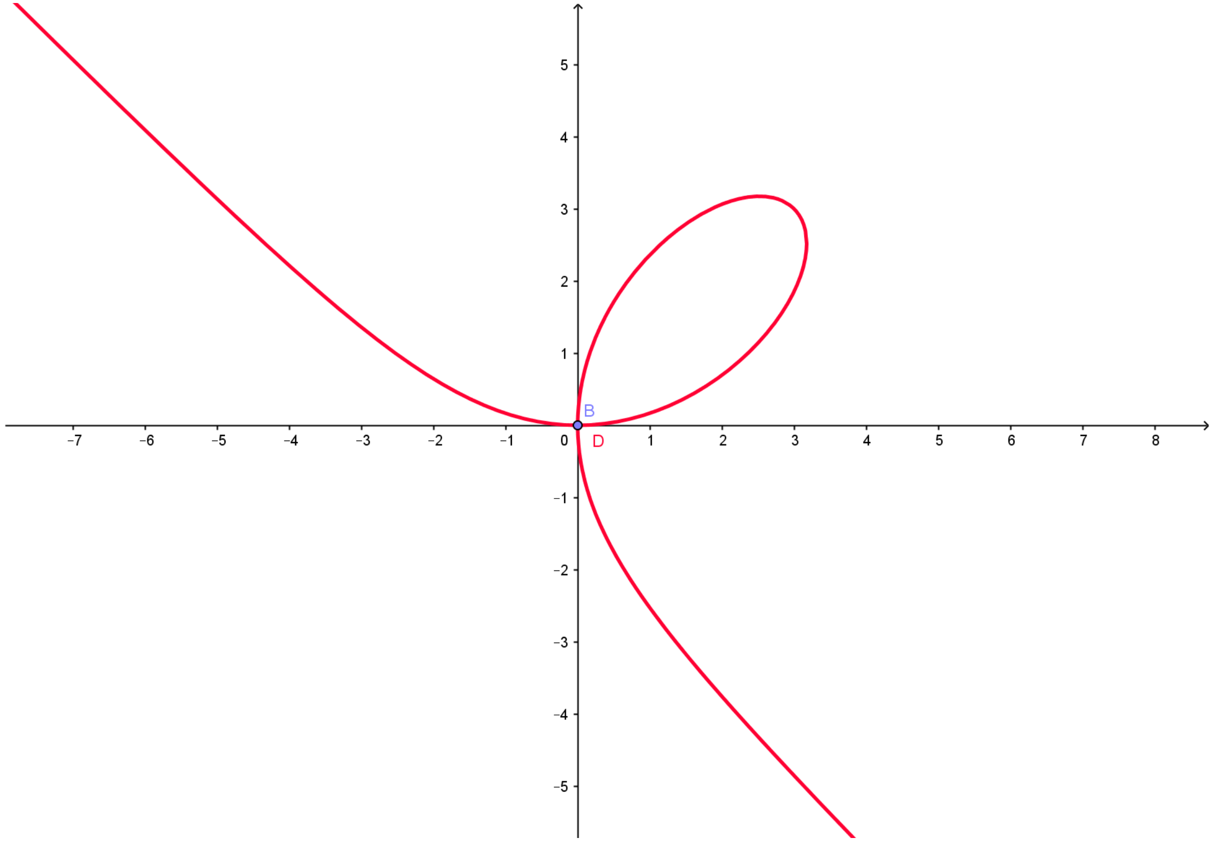


Špatný překlad:
Guido Grandi nazval křivku versoria=lano kterým se otáčí plachta
John Colson to při překladu zaměnil výraz la versiera za l‘aversierá=čarodějnice.

Bernoullího lemniskata



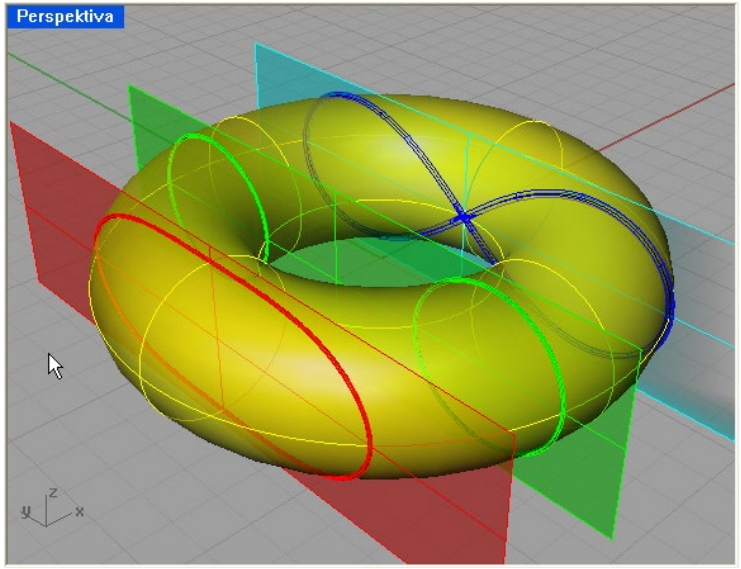
Descartův list

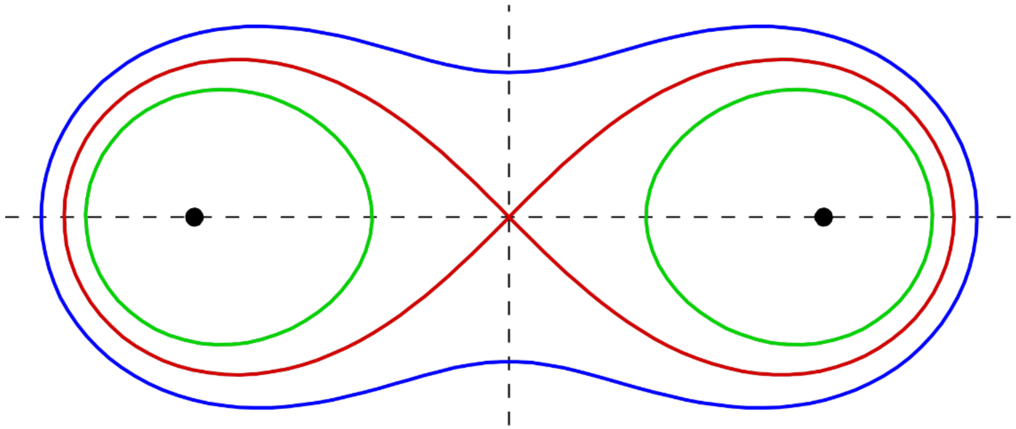


$$x = \frac{3\,at}{1+t^3}$$

$$y = \frac{3\,at^2}{1+t^3},$$

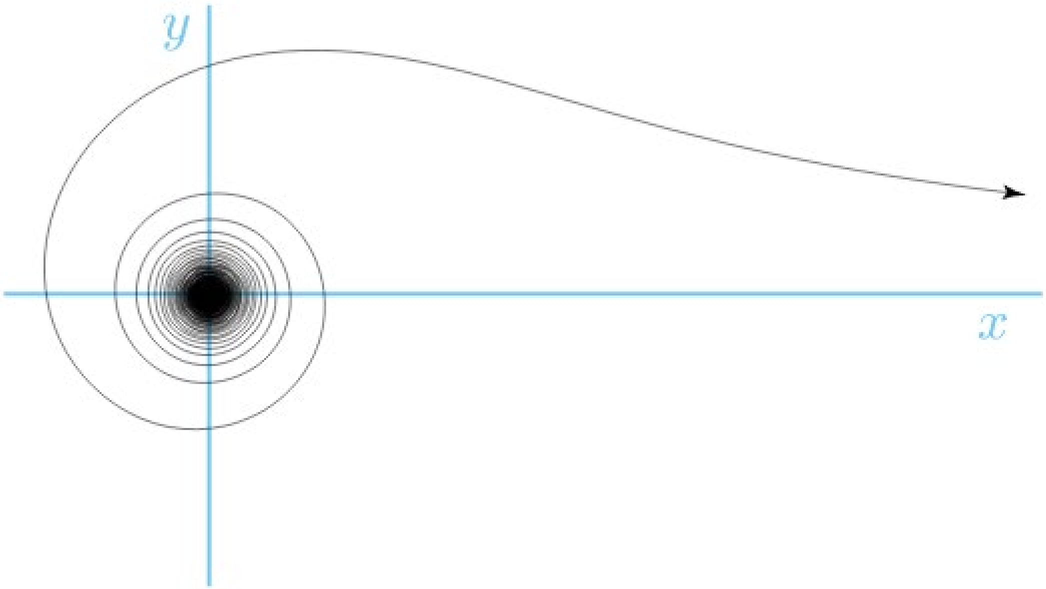
Cassiniho ovál





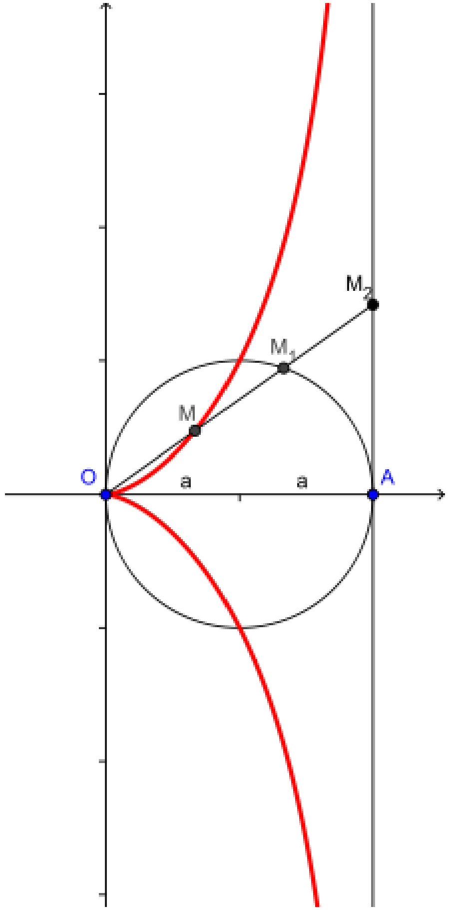
Lituuova spirála

Slovo lituus původně znamenalo zakřivenou augurální hůl nebo zakřivenou válečnou trubku ve starém latinském jazyce. Toto latinské slovo pokračovalo v používání přes 18. století jako alternativa k lidovým jménům různých hudebních nástrojů.

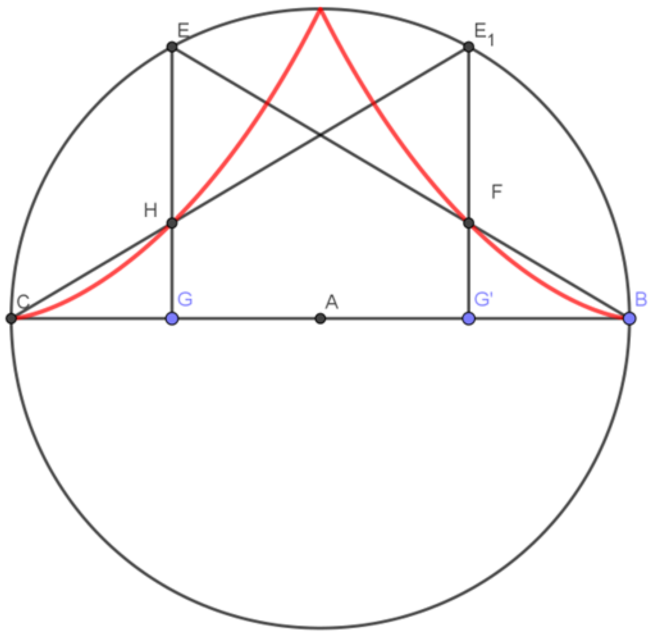


Dioklova kisoida

soubory\kisoida.ggb

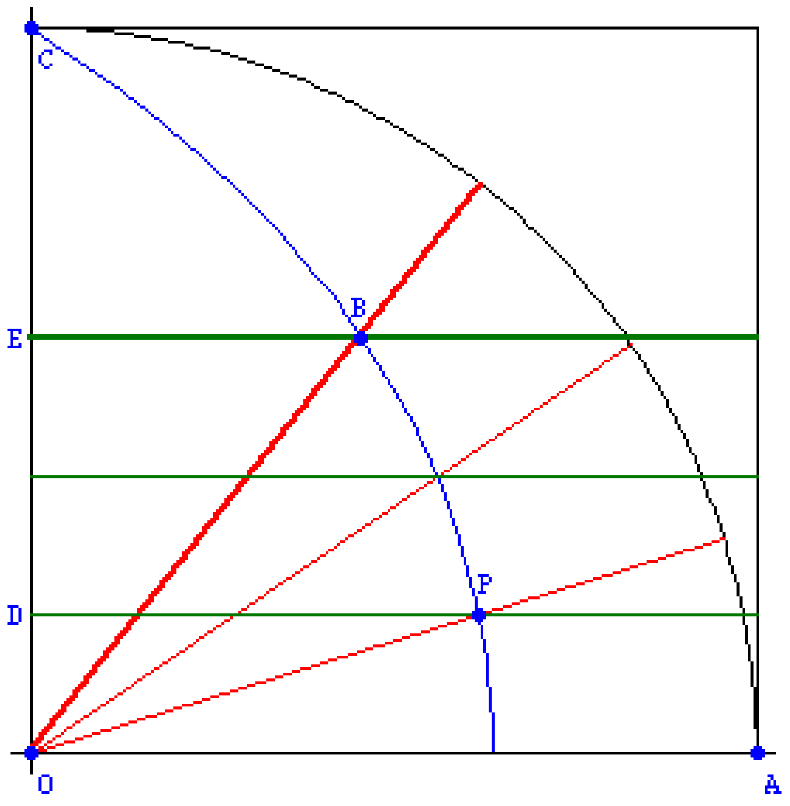


křivka podobná břečťanu



Křivky k sestrojení dvou středních geometrických úměrných

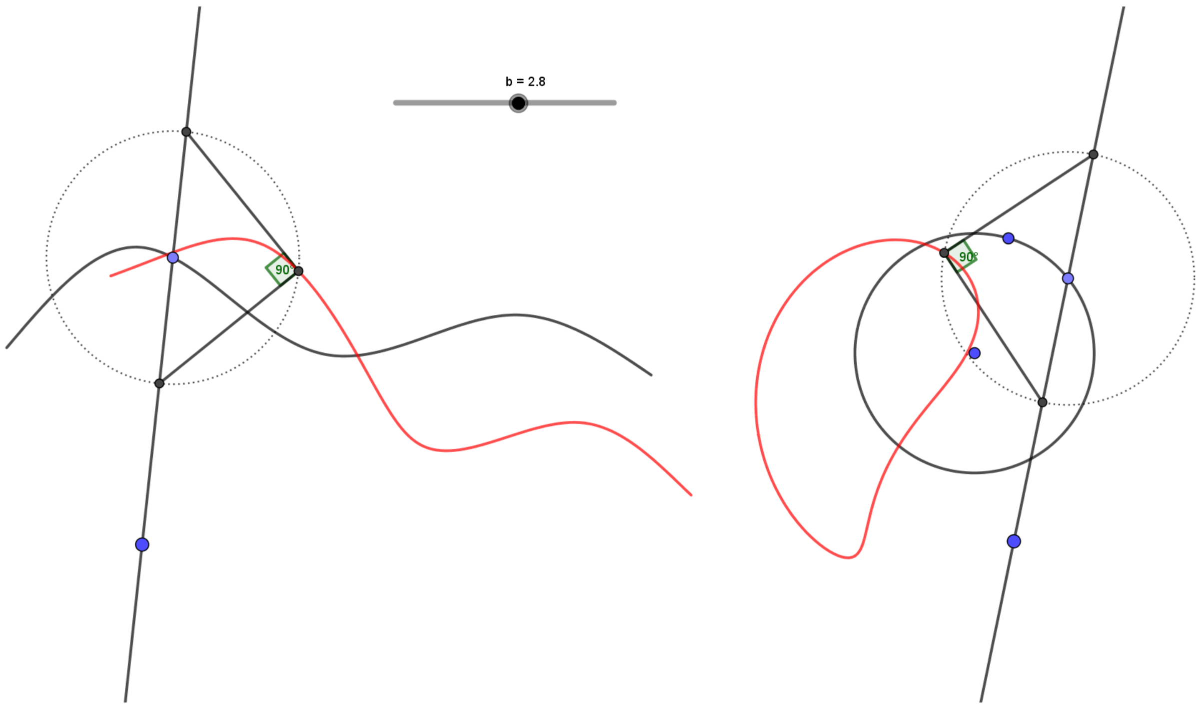
Hippiova kvadratrix



Hippias Ellis (~ 460 př.n.l.)
Používal ji na trisekci úhlu (někdy trisectrix Hippias).
Křivka je lépe známá jako kvadratrix, protože se později používala ke kvadratuře kružnice.

Strofoida

Strofoidu poprvé objevil při své práci Isaac Barrow v roce 1670, i když Torricelli popsal tuto křivku ve svých dopisech kolem roku 1645. Jméno (ve významu kroucený pás) navrhl Montucciv roce 1846.

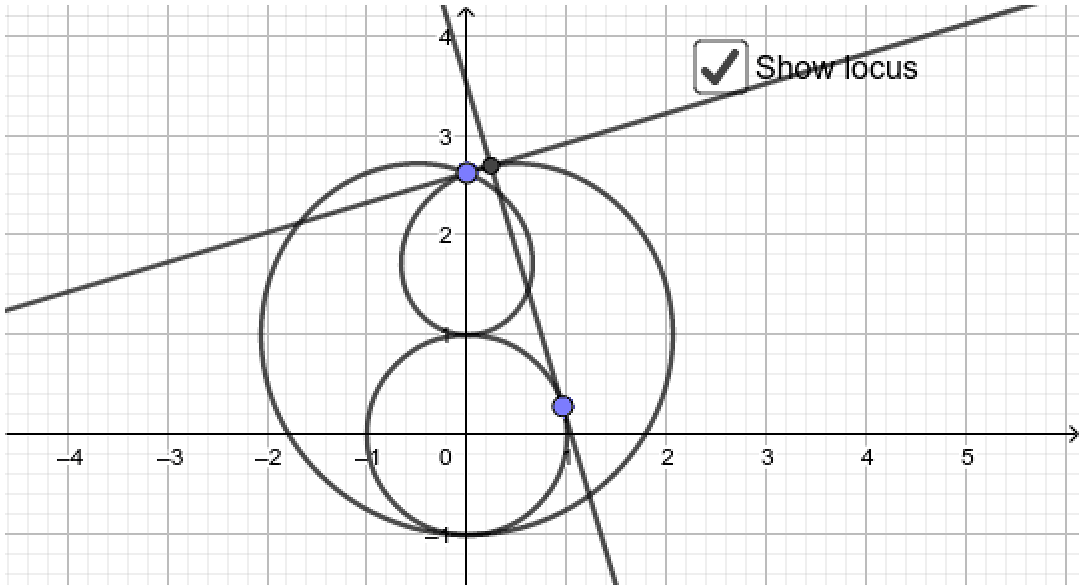


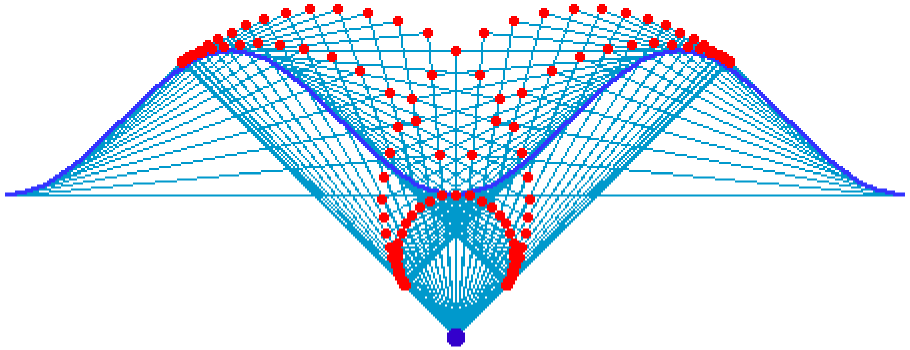
$$x = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}$$

$$y = \frac{at(1-t^2)}{1+t^2}.$$

soubory\strofoida.ggb

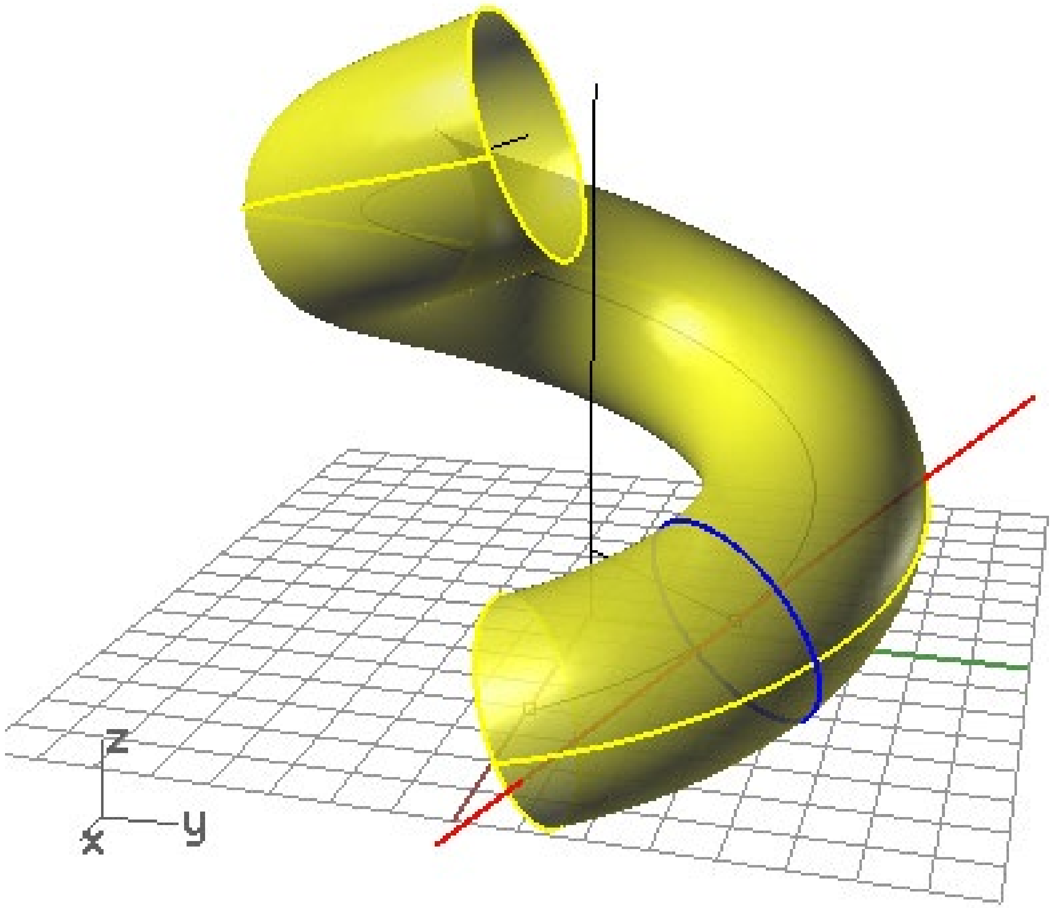
Úpatnice



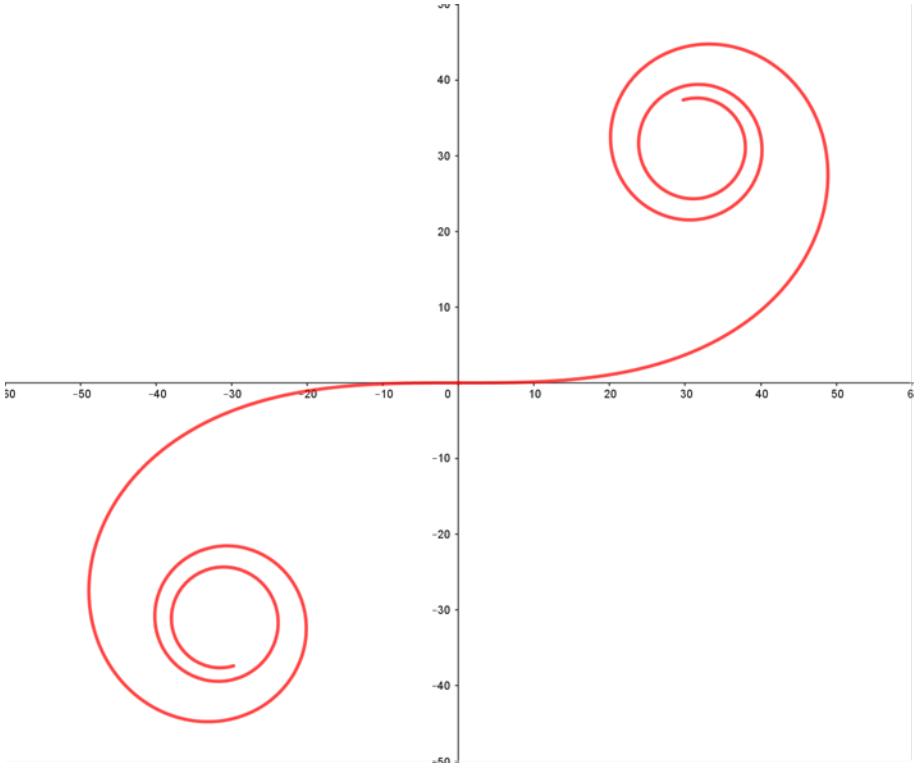


soubory\PedalCurve2.gif

Archimédova serpentina

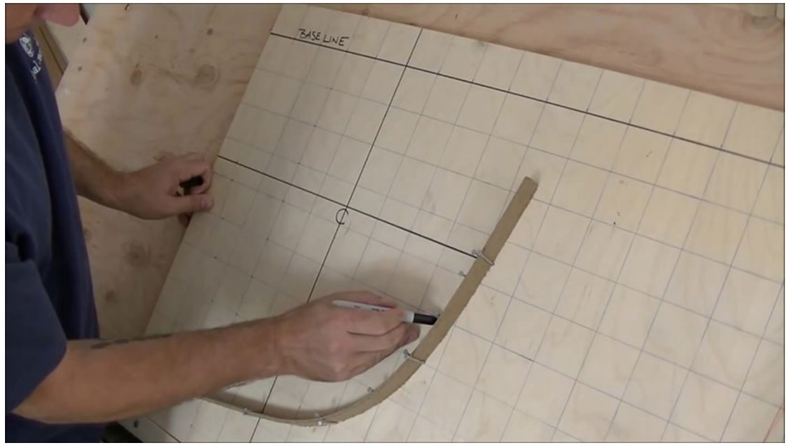


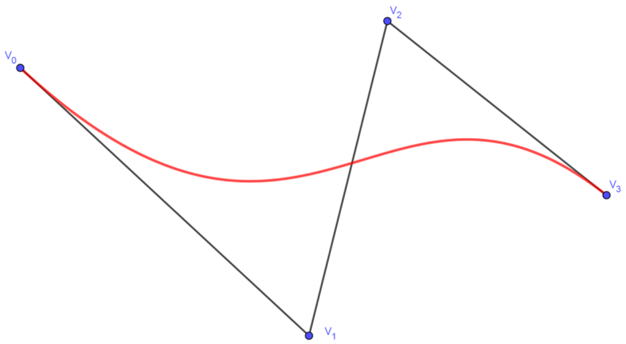
Klotoida



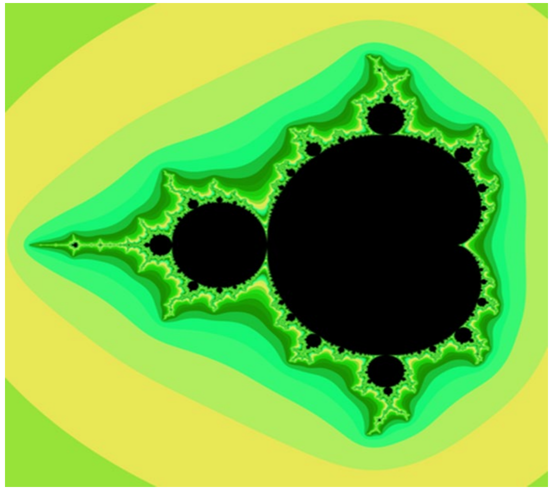
O čem jsme nemluvili

Interpolační a aproximační křivky
Spline a NURBS křivky





Dynamické systémy a fraktály



Spirály

Křivka obecná

Loxia curvirostra

https://temata.rozhlas.cz/krivka-obecna-7970755