FAKULTA
APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

www.KMA.zcu.cz
SINCE 1954

Funkcionální rovnice

1. část

Petr Nečesal
Katedra matematiky FAV ZČU

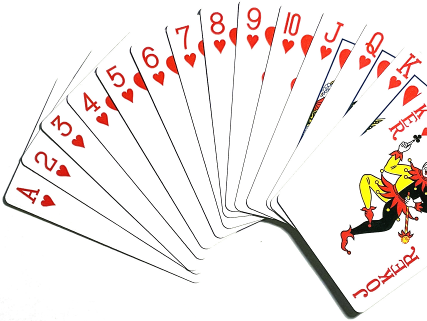
pnecesal@kma.zcu.cz
https://home.zcu.cz/~pnecesal/2_718281828459045235360287

Semináře (nejen) k MO a pro všechny zájemce o matematiku
5. dubna 2024

Faktoriál přirozeného čísla n

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$$

$$\begin{array}{lll}
1! & = 1 & = 1 \\
2! & = 1 \cdot 2 & = 2 \\
3! & = 1 \cdot 2 \cdot 3 & = 6 \\
4! & = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 & = 24 \\
5! & = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 & = 120 \\
6! & = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 & = 720 \\
7! & = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 & = 5\,040 \\
8! & = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 & = 40\,320 \\
9! & = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 & = 362\,880 \\
10! & = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 & = 3\,628\,800 \\
11! & = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 & = 39\,916\,800 \\
12! & = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 & = 479\,001\,600 \\
13! & = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 & = 6\,227\,020\,800 \\
14! & = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 & = 87\,178\,291\,200
\end{array}$$



Tvrzení: Pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ platí $n! = n \cdot (n-1)!$

Poznámka: Pokud definujeme $0! := 1$, potom rekurentní vztah $n! = n \cdot (n-1)!$ platí i pro $n = 1$.

Faktoriál přirozeného čísla n

$$n! := 1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$$

$$\begin{aligned}
1! &= 1 && = 1\\
2! &= 1\cdot 2 && = 2\\
3! &= 1\cdot 2\cdot 3 && = 6\\
4! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 && = 24\\
5! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 && = 120\\
6! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 && = 720\\
7! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 && = 5\,040\\
8! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 && = 40\,320\\
9! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 && = 362\,88\\
10! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 && = 3\,628\,8\\
11! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11 && = 39\,916\,8\\
12! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12 && = 479\,001\\
13! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13 && = 6\,227\,02\\
14! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14 && = 87\,178\,2
\end{aligned}$$

- $4.5! = ???$
- $4.5! \neq \dfrac{4! + 5!}{2} = 72$
- $4.5! \neq 4.5\cdot 3.5\cdot 2.5\cdot 1.5 = 59.0625$
- $4.5! = \frac{945}{32}\sqrt{\pi} \doteq 52.3428$
- $4.5! = \Gamma(5.5)$

Tvrzení: Pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ platí $n! = n\cdot(n$

Poznámka: Pokud definujeme $0! := 1$, potom rekurentní vztah $n! = n\cdot(n-1)!$ platí i pro $n = 1$.

Binomický rozvoj a kombinační čísla

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \textbf{pro} \quad 0 \le k \le n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^4 &= (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) \\
&= aaaa + \\
&\quad baaa + abaa + aaba + aaab + \\
&\quad bbaa + baba + baab + abba + abab + aabb + \\
&\quad abbb + babb + bbab + bbba + \\
&\quad bbbb \\
&= a^4 b^0 + 4\,a^3 b^1 + 6\,a^2 b^2 + 4\,a^1 b^3 + a^0 b^4 \\
&= \tbinom{4}{0} a^4 b^0 + \tbinom{4}{1} a^3 b^1 + \tbinom{4}{2} a^2 b^2 + \tbinom{4}{3} a^1 b^3 + \tbinom{4}{4} a^0 b^4 = \sum_{k=0}^{4} \tbinom{4}{k} a^{4-k} b^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^5 &= a^5 b^0 + 5\,a^4 b^1 + 10\,a^3 b^2 + 10\,a^2 b^3 + 5\,a^1 b^4 + a^0 b^5 \\
&= \tbinom{5}{0} a^5 b^0 + \tbinom{5}{1} a^4 b^1 + \tbinom{5}{2} a^3 b^2 + \tbinom{5}{3} a^2 b^3 + \tbinom{5}{4} a^1 b^4 + \tbinom{5}{5} a^0 b^5 = \sum_{k=0}^{5} \tbinom{5}{k} a^{5-k} b^k
\end{aligned}$$

Binomický rozvoj a zobecněná kombinační čísla

$$\binom{n}{k} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}$$

$$(a+b)^4 = a^4b^0 + 4\,a^3b^1 + 6\,a^2b^2 + 4\,a^1b^3 + a^0b^4 + 0\,a^{-1}b^5 + 0\,a^{-2}b^6 + \cdots$$

$$(a+b)^{4.5} = (a+b)^{\frac{9}{2}} = \left(\sqrt{a+b}\right)^9$$

$$= a^{\frac{9}{2}}b^0 + 4.5\,a^{\frac{7}{2}}b^{\frac{2}{2}} + 7.875\,a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{4}{2}} + 6.5625\,a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{6}{2}} + 2.4609375\,a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{8}{2}} + 0.24609375\,a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{10}{2}} + \cdots$$

$$(a+b)^{4.9} = (a+b)^{\frac{49}{10}}$$

$$= a^{\frac{49}{10}}b^0 + 4.9\,a^{\frac{39}{10}}b^{\frac{10}{10}} + 9.555\,a^{\frac{29}{10}}b^{\frac{20}{10}} + 9.2365\,a^{\frac{19}{10}}b^{\frac{30}{10}} + 4.3873375\,a^{\frac{9}{10}}b^{\frac{40}{10}} + 0.78972075\,a^{-\frac{1}{10}}b^{\frac{50}{10}} + \cdots$$

$$(a+b)^5 = a^5b^0 + 5\,a^4b^1 + 10\,a^3b^2 + 10\,a^2b^3 + 5\,a^1b^4 + a^0b^5 + 0\,a^{-1}b^6 + 0\,a^{-2}b^7 + \cdots$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k,$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{pro } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{pro } k > n \end{cases}$$

Funkcionální rovnice

Úloha 1. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro které platí $\forall x \in \mathbb{R}: \ 2f(-x) + x = 0$

Řešení:

- dosazením $(-x)$ za x máme

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ 2f(-(-x)) - x = 0$$
$$f(x) = \frac{x}{2}$$

Úloha 2. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro které platí $\forall x \in \mathbb{R}: \ 2f(-x) + x = f(x)$

Řešení:

- dosazením $(-x)$ za x máme

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ 2f(-(-x)) - x = f(-x)$$

- odtud dosazením za $f(-x)$ do původní rovnice máme

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ 2(2f(x) - x) + x = f(x)$$
$$4f(x) - x = f(x)$$
$$f(x) = \frac{x}{3}$$

Úloha 3. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro které platí $\forall x \in \mathbb{R}: \ f(-x) + x = f(x)$

Řešení:

- $f(x) = \dfrac{x}{2}$ je řešení, $f(x) = 1 + \dfrac{x}{2}$ je řešení, $f(x) = g(x) + \dfrac{x}{2}$ je řešení, kde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je sudá funkce

Funkcionální rovnice

Úloha 4. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, pro které platí

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^+ : \; f(x^2) = x + f(y) - \frac{y}{f(y)}$$

Řešení:

- dosazením $x = y = 1$ máme

$$f(1) = 1 + f(1) - \frac{1}{f(1)}$$
$$\frac{1}{f(1)} = 1$$
$$f(1) = 1$$

- dosazením $x = 1$ máme

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^+ : \quad f(1) = 1 + f(y) - \frac{y}{f(y)}$$
$$\frac{y}{f(y)} = f(y)$$
$$y = (f(y))^2$$
$$\forall\, y \in \mathbb{R}^+ : \quad \sqrt{y} = f(y)$$

- provedením zkoušky snadno ověříme, že funkce $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$, je řešením funkcionální rovnice

Funkcionální rovnice

Úloha 5. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro které platí $\forall\, x, y \in \mathbb{R}:\ f(x+y) - f(x-y) = x \cdot y$

Řešení:

- dosazením $x = 0$ máme
$$\begin{aligned} \forall\, y \in \mathbb{R}:\ f(y) - f(-y) &= 0 \\ f(y) &= f(-y) \end{aligned}$$
tedy f je sudá funkce
- dosazením $y = x$ máme
$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}:\ f(2x) - f(0) &= x^2 \\ f(2x) &= x^2 + f(0) \\ f(2x) &= x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
- odtud dosazením $\frac{x}{2}$ za x máme $\quad \forall\, x \in \mathbb{R}:\ f(x) = \frac{x^2}{4} + c$
- provedením zkoušky ověříme, že každá funkce $f(x) = \frac{x^2}{4} + c, \quad c \in \mathbb{R},$ je řešením funkcionální rovnice

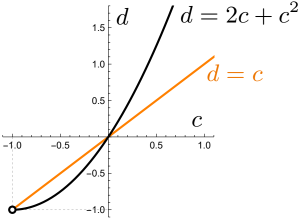
$$\begin{aligned} \forall\, x, y \in \mathbb{R}:\ f(x+y) - f(x-y) &= \tfrac{1}{4}(x+y)^2 + c - \tfrac{1}{4}(x-y)^2 - c \\ &= \tfrac{1}{4}\left(x^2 + 2xy + y^2\right) - \tfrac{1}{4}\left(x^2 - 2xy + y^2\right) \\ &= x \cdot y \end{aligned}$$

Úloha 6. Najděte všechny funkce $f : S \to S$, kde $S := (-1, +\infty)$, pro které platí:

1. $\forall\, x, y \in S: \ f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$
2. $\frac{f(x)}{x}$ je rostoucí funkce na intervalech $(-1, 0)$ a $(0, +\infty)$

Řešení:

- Zvolme libovolně $x \in S$, potom pro $y = x$ máme $f(x + f(x) + xf(x)) = x + f(x) + xf(x)$.
  Tedy $f(c) = c$, kde $c := x + f(x) + xf(x)$.
- Pro $y = x = c$ máme
  $$f(c + f(c) + cf(c)) = c + f(c) + cf(c)$$
  $$f(c + c + c \cdot c) = c + c + c \cdot c$$
  $$f(2c + c^2) = 2c + c^2$$
  Tedy $f(d) = d$, kde $d := 2c + c^2$.



- Předpokládejme, že $c > 0$.
  Potom $d > 0$ a $\frac{f(c)}{c} = 1 = \frac{f(d)}{d}$. Dále máme $c < d$, a tedy $\frac{f(c)}{c} < \frac{f(d)}{d}$, což je spor $\lightning$.
- Předpokládejme, že $c < 0$.
  Potom $d < 0$ a $\frac{f(c)}{c} = 1 = \frac{f(d)}{d}$. Dále máme $d < c$, a tedy $\frac{f(d)}{d} < \frac{f(c)}{c}$, což je spor $\lightning$.
- Tedy nutně $c = 0$, a tedy $x + f(x) + xf(x) = 0$, $x + (1 + x)f(x) = 0$, $f(x) = -\dfrac{x}{1 + x} = -1 + \dfrac{1}{x + 1}$

Mezinárodní matematická olympiáda (IMO)

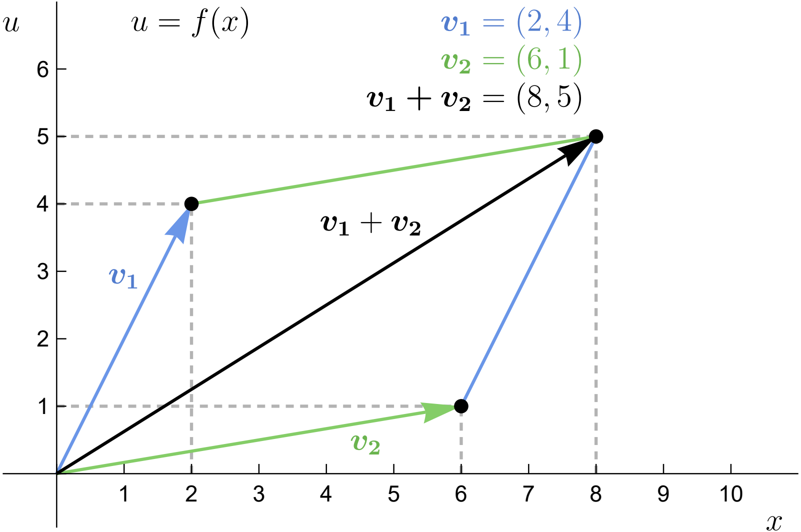
- První mezinárodní matematická olympiáda se konala v Rumunsku roku 1959.
- Úlohy jsou vybírány z oblastí **matematické analýzy**, **projektivní geometrie**, **funkcionálních rovnic**, **teorie čísel** atd.
- Předchozí 6. úloha byla zařazena jako jedna z šesti úloh na IMO v Hong Kongu roku 1994.
- V tomto roce 1994 na IMO získala zlatou medaili **Maryam Mirzakhani** (Írán).
- V roce 2014 **Maryam Mirzakhani** získala Fieldsovu medaili (dynamika a geometrie Riemannových ploch).
- Z deníku The Guardian (13. srpna 2014):

  Co byste poradila těm, kteří by se chtěli dozvědět o matematice více – co to je, jaká je její role ve společnosti?

To je těžká otázka.
Nemyslím si, že by se každý měl stát matematikem, jsem ale přesvědčena, že mnoho studentů vůbec nedává matematice reálné šance.
Na střední škole jsem po několik let měla v matematice špatné výsledky, neměla jsem zájem o ní přemýšlet.
Vím, že bez nadšení může matematika vypadat nesmyslně a chladně.
Krása matematiky se ukáže jen trpělivým následovníkům.

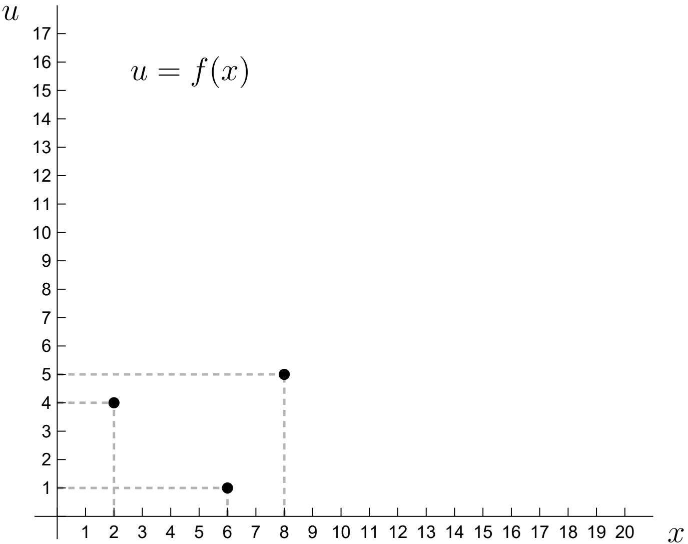
`Secrets of the Surface - Official Trailer 2020`

Cauchyova rovnice $f(x+y) = f(x) + f(y)$ **pro všechna** $x, y \in \mathbb{R}$

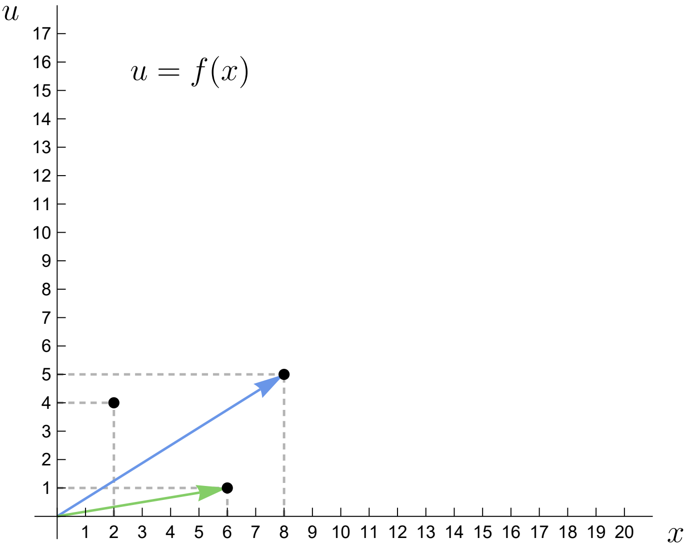


- $f(2) = 4$
  $f(6) = 1$
  $f(8) = ?$
- $f(8) = f(2+6)$
  $f(8) = f(2) + f(6)$
  $f(8) = 4 + 1$
  $f(8) = 5$

Cauchyova rovnice $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

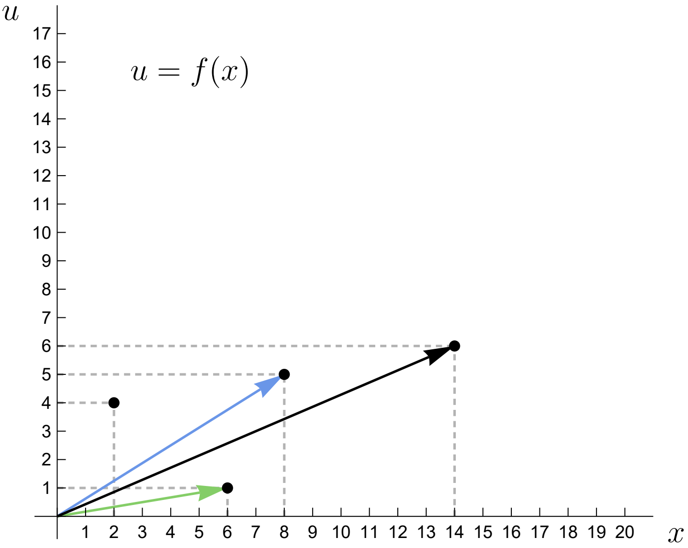


Cauchyova rovnice $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$



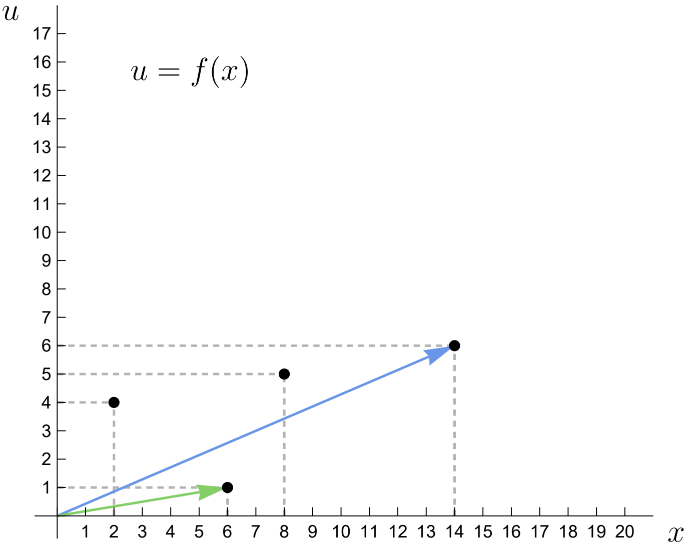
- $\boldsymbol{v}_1 = (8, 5)$
  $\boldsymbol{v}_2 = (6, 1)$

Cauchyova rovnice $\quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$



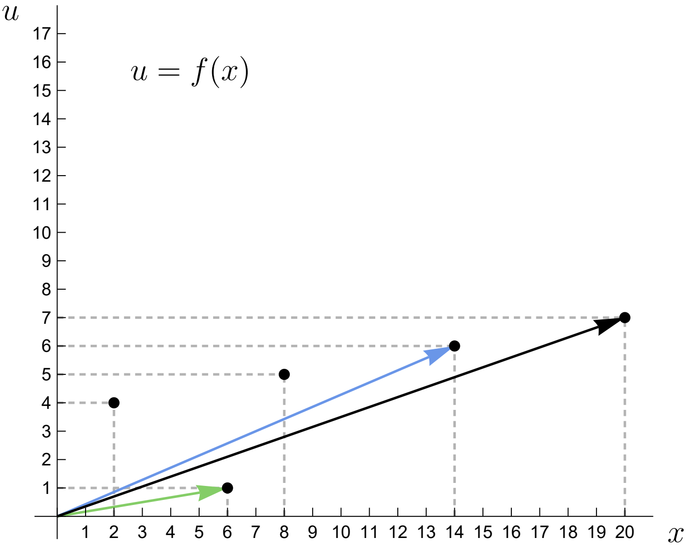
$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (8,5) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (6,1) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (14,6)$$

Cauchyova rovnice $\quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad$ **pro všechna** $x, y \in \mathbb{R}$



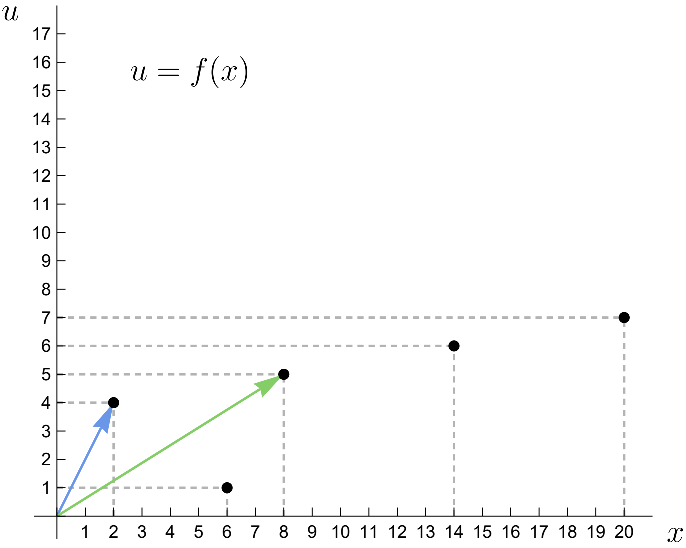
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (8,5) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (6,1) \end{aligned}\right\} \; \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (14,6)$
- $\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (14,6) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (6,1) \end{aligned}$

Cauchyova rovnice $f(x+y) = f(x) + f(y)$ **pro všechna** $x, y \in \mathbb{R}$



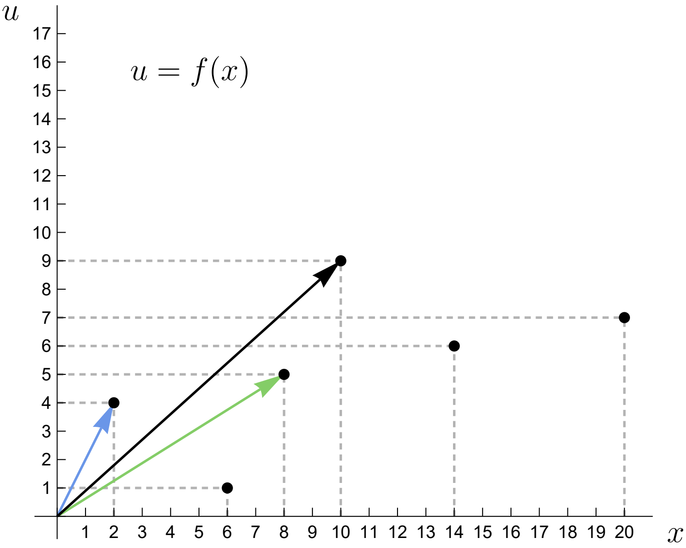
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (8,5) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (6,1) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (14,6)$
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (14,6) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (6,1) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (20,7)$

Cauchyova rovnice $\quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$



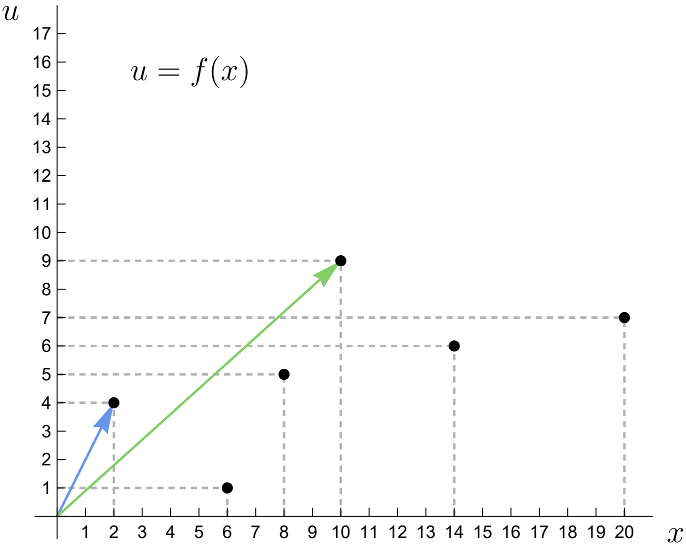
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (8,5) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (6,1) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (14,6)$
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (14,6) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (6,1) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (20,7)$
- $\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2,4) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (8,5) \end{aligned}$

Cauchyova rovnice $f(x+y) = f(x) + f(y)$ **pro všechna** $x, y \in \mathbb{R}$



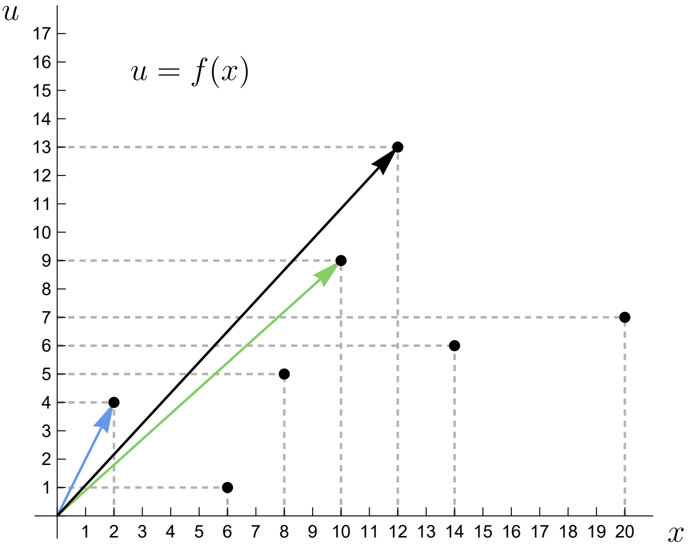
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (8,5) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (6,1) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (14,6)$
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (14,6) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (6,1) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (20,7)$
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2,4) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (8,5) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (10,9)$

Cauchyova rovnice $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$



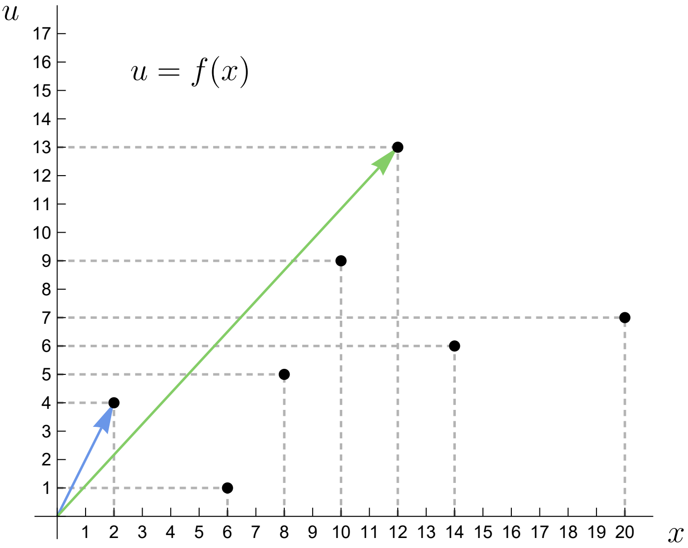
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (8,5) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (6,1) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (14,6)$
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (14,6) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (6,1) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (20,7)$
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2,4) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (8,5) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (10,9)$
- $\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2,4) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (10,9) \end{aligned}$

Cauchyova rovnice $\quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$



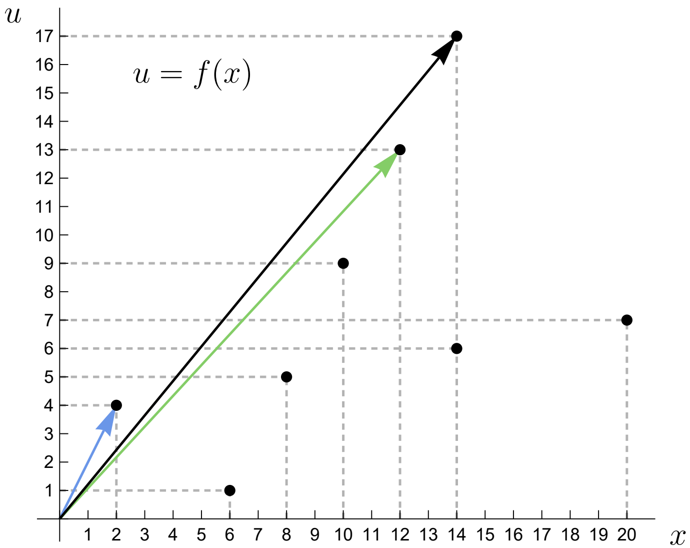
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (8, 5) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (6, 1) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (14, 6)$
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (14, 6) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (6, 1) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (20, 7)$
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2, 4) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (8, 5) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (10, 9)$
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2, 4) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (10, 9) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (12, 13)$

Cauchyova rovnice $\quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad$ **pro všechna** $x, y \in \mathbb{R}$



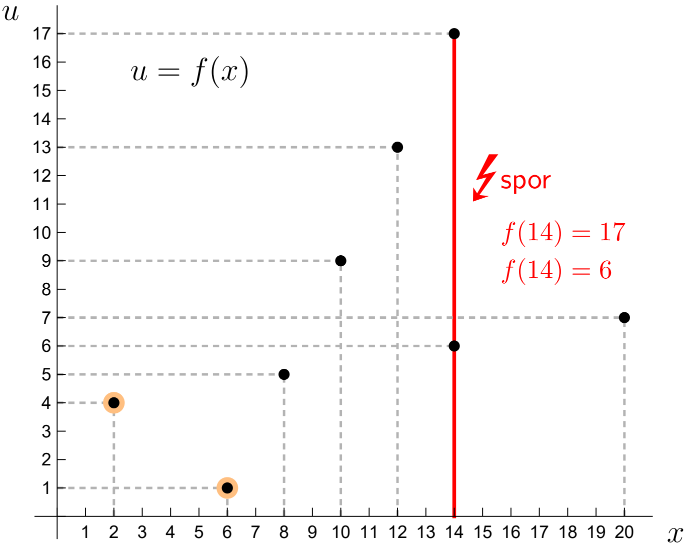
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (8,5) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (6,1) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (14,6)$
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (14,6) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (6,1) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (20,7)$
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2,4) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (8,5) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (10,9)$
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2,4) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (10,9) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (12,13)$
- $\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2,4) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (12,13) \end{aligned}$

Cauchyova rovnice $f(x+y) = f(x) + f(y)$ **pro všechna** $x, y \in \mathbb{R}$



- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (8,5) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (6,1) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (14,6)$
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (14,6) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (6,1) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (20,7)$
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2,4) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (8,5) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (10,9)$
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2,4) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (10,9) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (12,13)$
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2,4) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (12,13) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (14,17)$

Cauchyova rovnice $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$



- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (8,5) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (6,1) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (14,6)$
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (14,6) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (6,1) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (20,7)$
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2,4) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (8,5) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (10,9)$
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2,4) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (10,9) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (12,13)$
- $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2,4) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (12,13) \end{aligned}\right\} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (14,17)$

Cauchyova rovnice $$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \; f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{C1}$$

Tvrzení 1: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies$ f je lichá

Důkaz:
Pro volbu $x = y = 0$ v (C1) máme

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0) + f(0) \\ 0 &= f(0) \end{aligned} \tag{1}$$

Pro volbu $y = -x$ v (C1) máme

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}: \; f(x + (-x)) &= f(x) + f(-x) \\ f(0) &= f(x) + f(-x) \\ 0 &= f(x) + f(-x) \\ \forall\, x \in \mathbb{R}: \; -f(x) &= f(-x) \end{aligned} \tag{2}$$

∎

Cauchyova rovnice $\forall\, x, y \in \mathbb{R} : \; f(x+y) = f(x) + f(y)$ (C1)

Tvrzení 2: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies$ $\forall\, a \in \mathbb{R}\; \forall\, n \in \mathbb{N} : \; f(n \cdot a) = n \cdot f(a)$

Důkaz(matematickou indukcí podle n **):**
Zvolme libovolně $a \in \mathbb{R}$.

Pro $n = 1$ máme $f(1 \cdot a) = 1 \cdot f(a)$

Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $f(n \cdot a) = n \cdot f(a)$

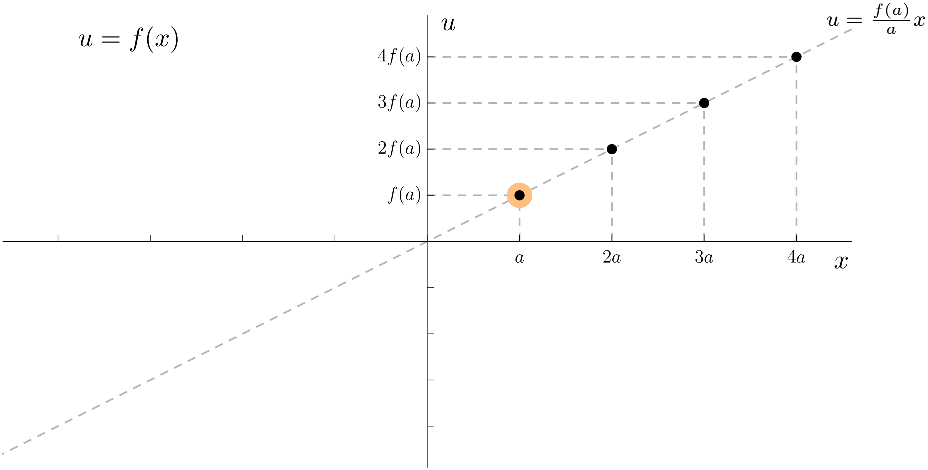
Pro volbu $x = n \cdot a$ a $y = a$ v (C1) máme

$$\begin{aligned} f((n+1) \cdot a) = f(n \cdot a + a) &= f(n \cdot a) + f(a) \\ &= n \cdot f(a) + f(a) \\ &= (n+1) \cdot f(a) \end{aligned}$$

■

Cauchyova rovnice $$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \; f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{C1}$$

Tvrzení 2: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies$ $\forall\, a \in \mathbb{R}\; \forall\, n \in \mathbb{N}: \; f(n \cdot a) = n \cdot f(a)$



$$\vdots$$
$$f(4a) = 4f(a)$$
$$f(3a) = 3f(a)$$
$$f(2a) = 2f(a)$$
$$f(a) = f(a)$$

Cauchyova rovnice $\forall x, y \in \mathbb{R}: \; f(x+y) = f(x) + f(y)$ (C1)

Tvrzení 3: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies$ $\forall a \in \mathbb{R} \, \forall m \in \mathbb{Z}: \; f(m \cdot a) = m \cdot f(a)$

Důkaz:
Víme, že f je lichá, $f(0) = 0$ a platí

$$\forall a \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \; f(n \cdot a) = n \cdot f(a)$$

- Pro $m > 0$ máme $m \in \mathbb{N}$, a tedy $f(m \cdot a) = m \cdot f(a)$
- Pro $m = 0$ máme $f(m \cdot a) = f(0) = 0 = m \cdot f(a)$
- Pro $m < 0$ máme $(-m) \in \mathbb{N}$, a tedy

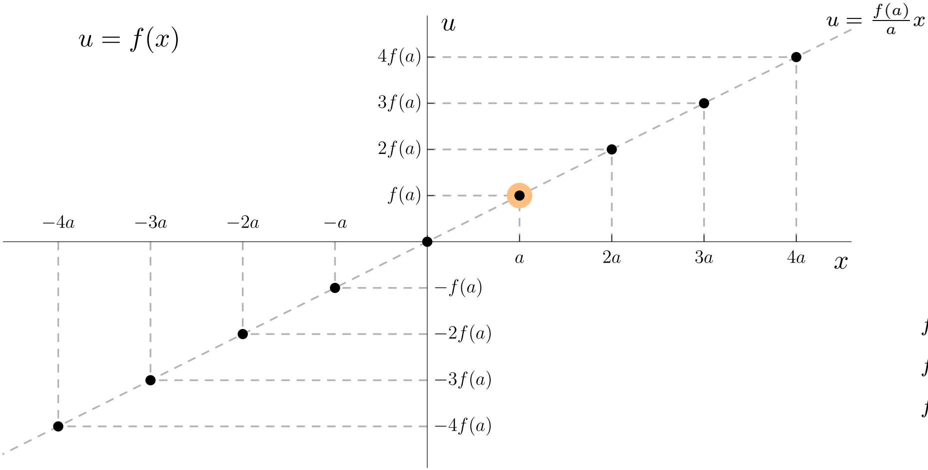
$$f(m \cdot a) = f(-(-m) \cdot a) = -f((-m) \cdot a) = -(-m) \cdot f(a) = m \cdot f(a)$$

■

Cauchyova rovnice

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \; f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{C1}$$

Tvrzení 3: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies$ $\forall\, a \in \mathbb{R}\; \forall\, m \in \mathbb{Z}: \; f(m \cdot a) = m \cdot f(a)$



$$\vdots$$
$$f(4a) = 4f(a)$$
$$f(3a) = 3f(a)$$
$$f(2a) = 2f(a)$$
$$f(a) = f(a)$$
$$f(0) = 0$$
$$f(-a) = -f(a)$$
$$f(-2a) = -2f(a)$$
$$f(-3a) = -3f(a)$$
$$f(-4a) = -4f(a)$$
$$\vdots$$

Cauchyova rovnice $$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{C1}$$

Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies$ $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall q \in \mathbb{Q}: \ f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$

Důkaz:
Víme, že platí $$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall m \in \mathbb{Z}: \ f(m \cdot a) = m \cdot f(a) \tag{3}$$

Pro $a = \dfrac{b}{n}$ a $m = n$, kde $b \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, máme $m \cdot a = b$ a dále

$$\forall b \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}: \ f(b) = n \cdot f\left(\tfrac{b}{n}\right)$$

$$\tfrac{1}{n} \cdot f(b) = f\left(\tfrac{1}{n} \cdot b\right) \tag{4}$$

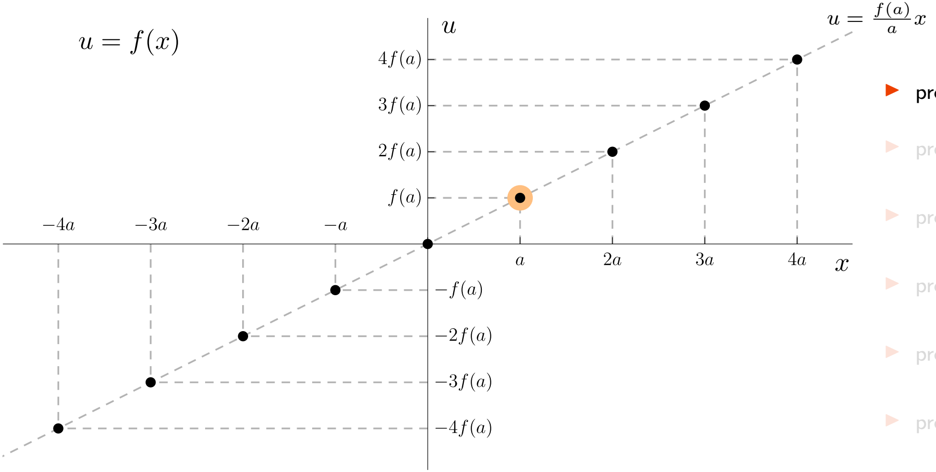
Pro $q = \dfrac{m}{n}$, kde $m \in \mathbb{Z}$ a $n \in \mathbb{N}$, tak dostáváme

$$f(q \cdot a) = f\left(\frac{m}{n} \cdot a\right) = f\left(\frac{1}{n} \cdot \underbrace{ma}_{=b}\right) = \frac{1}{n} \cdot f(\underbrace{ma}_{=b}) = \frac{m}{n} \cdot f(a) = q \cdot f(a)$$

$\blacksquare$

Cauchyova rovnice $\forall\, x, y \in \mathbb{R}:\; f(x+y) = f(x) + f(y)$ (C1)

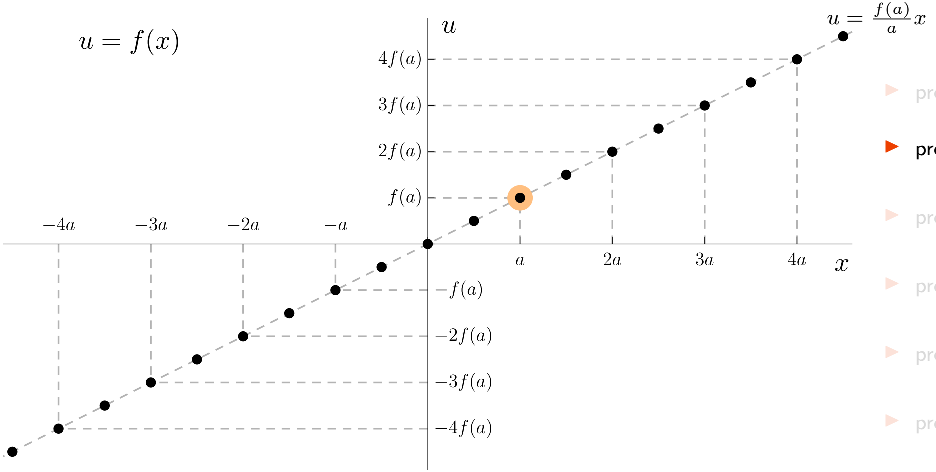
Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\Longrightarrow$ $\forall\, a \in \mathbb{R}\; \forall\, q \in \mathbb{Q}:\; f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$



- pro $q = m, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{4}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{8}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{16}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{32}, \quad m \in \mathbb{Z}$

Cauchyova rovnice $\quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}: \; f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad$ (C1)

Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies \forall\, a \in \mathbb{R}\; \forall\, q \in \mathbb{Q}: \; f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$

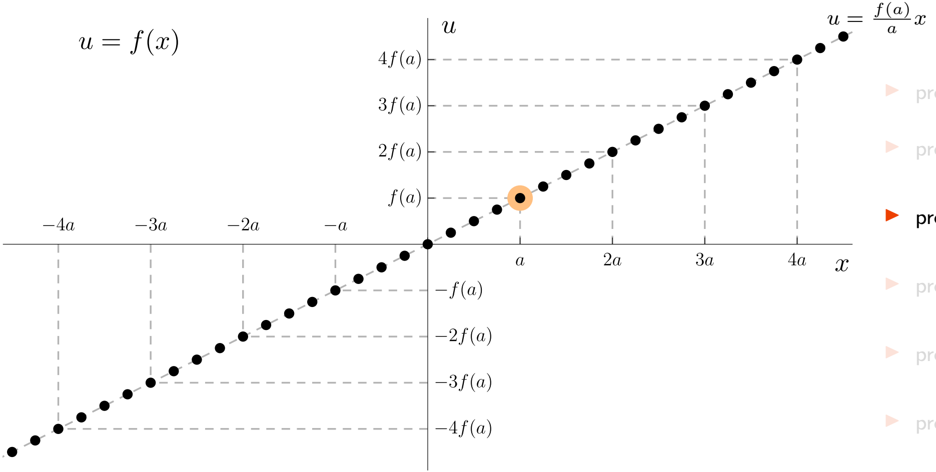


- pro $q = m, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \dfrac{m}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \dfrac{m}{4}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \dfrac{m}{8}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \dfrac{m}{16}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \dfrac{m}{32}, \quad m \in \mathbb{Z}$

Cauchyova rovnice

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \; f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{C1}$$

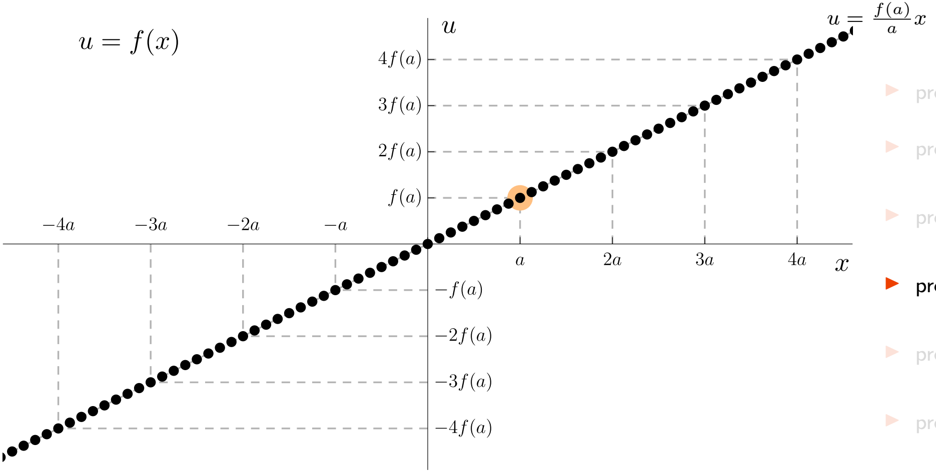
Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies$ $\forall\, a \in \mathbb{R}\; \forall\, q \in \mathbb{Q}: \; f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$



- pro $q = m, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{4}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{8}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{16}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{32}, \quad m \in \mathbb{Z}$

Cauchyova rovnice $\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \;\; f(x+y) = f(x) + f(y)$ (C1)

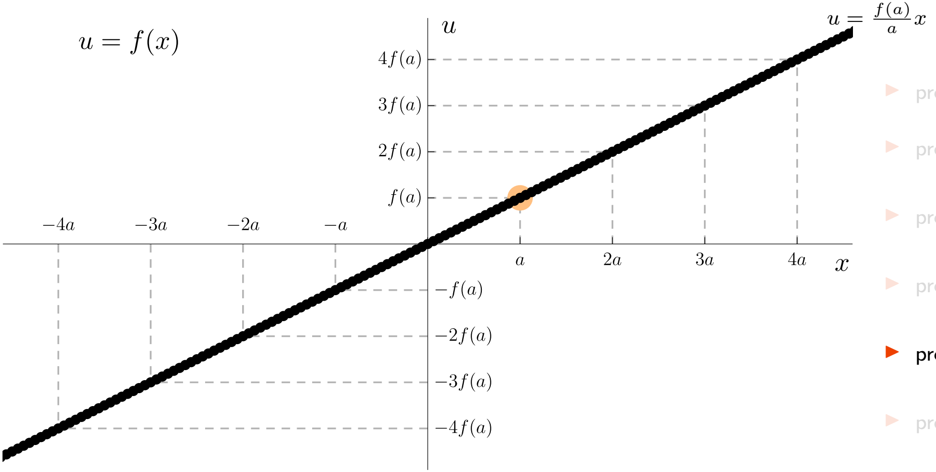
Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies$ $\forall\, a \in \mathbb{R}\; \forall\, q \in \mathbb{Q}: \;\; f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$



- pro $q = m$, $m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{4}$, $m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{8}$, $m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{16}$, $m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{32}$, $m \in \mathbb{Z}$

Cauchyova rovnice $\quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}: \ f(x+y) = f(x) + f(y) \quad$ (C1)

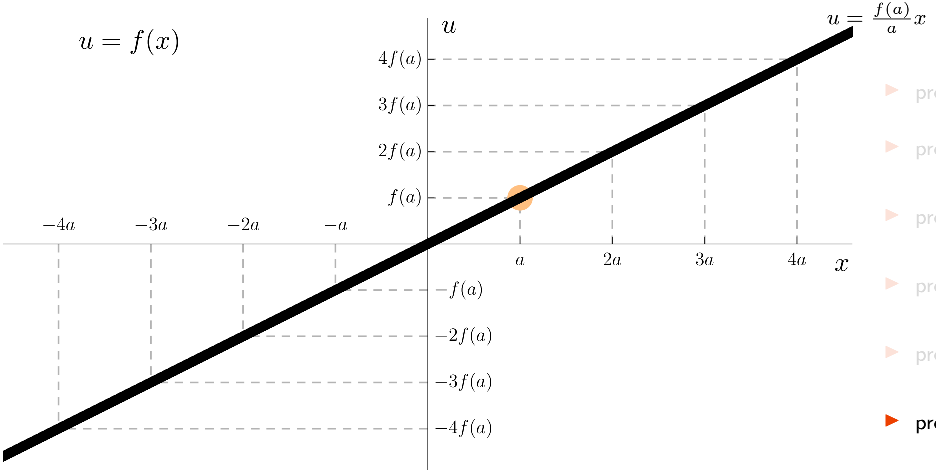
Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies$ $\forall\, a \in \mathbb{R}\ \forall\, q \in \mathbb{Q}: \ f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$



- pro $q = m, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{4}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{8}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{16}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{32}, \quad m \in \mathbb{Z}$

Cauchyova rovnice $\quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}: \;\; f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (\texttt{C1})$

Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies \forall\, a \in \mathbb{R}\; \forall\, q \in \mathbb{Q}: \;\; f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$

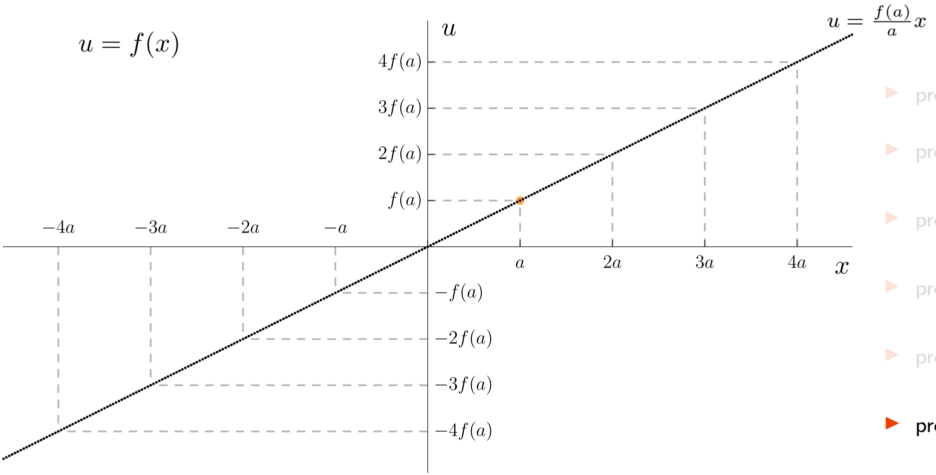


- pro $q = m, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{4}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{8}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{16}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{32}, \quad m \in \mathbb{Z}$

Cauchyova rovnice

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{C1}$$

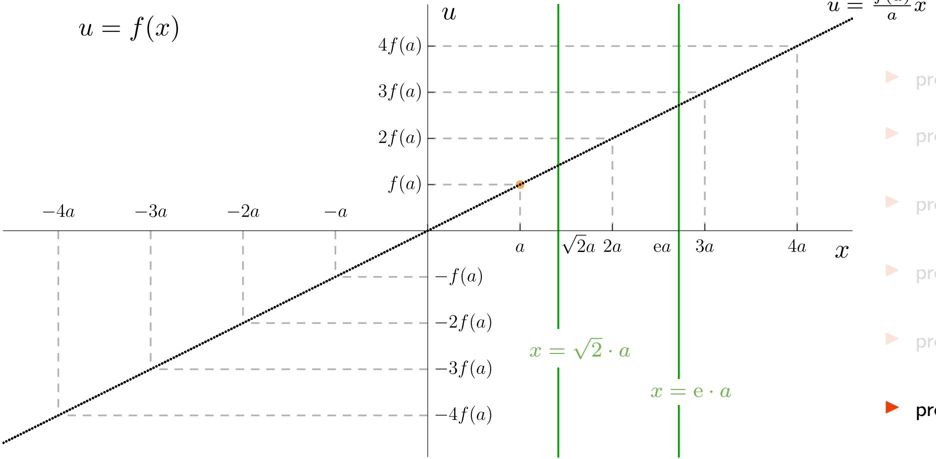
Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies$ $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall q \in \mathbb{Q}: \ f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$



- pro $q = m, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{4}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{8}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{16}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{32}, \quad m \in \mathbb{Z}$

Cauchyova rovnice $\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \; f(x+y) = f(x) + f(y)$ (C1)

Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies$ $\forall\, a \in \mathbb{R}\; \forall\, q \in \mathbb{Q}: \; f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$

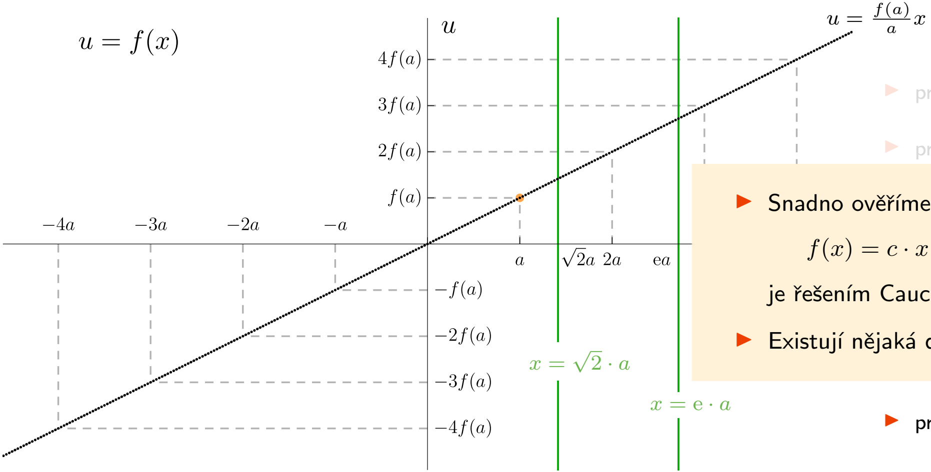


- pro $q = m, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{4}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{8}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{16}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- pro $q = \frac{m}{32}, \quad m \in \mathbb{Z}$

Cauchyova rovnice

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \;\; f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{C1}$$

Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies$ $\forall\, a \in \mathbb{R}\; \forall\, q \in \mathbb{Q}: \;\; f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$



- Snadno ověříme, že lineární funkce

  $$f(x) = c \cdot x, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R},$$

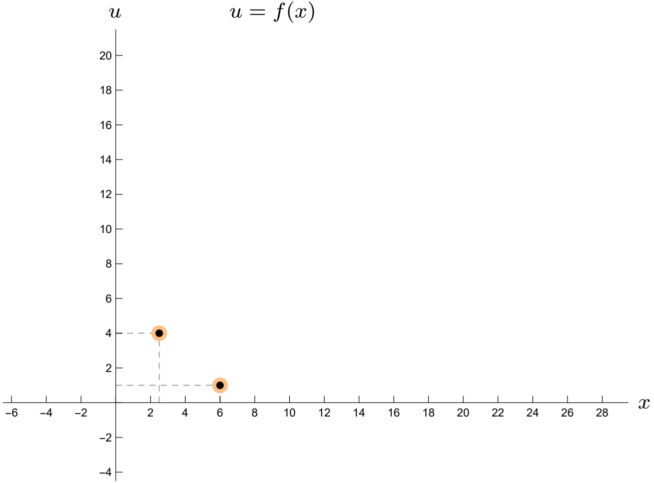
  je řešením Cauchyovy rovnice (C1).
- Existují nějaká další řešení?

- pro $q = \frac{m}{32}$, $\quad m \in \mathbb{Z}$

Cauchyova rovnice

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \; f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \texttt{(C1)}$$

Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies$ $\forall\, a \in \mathbb{R}\; \forall\, q \in \mathbb{Q}: \; f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$

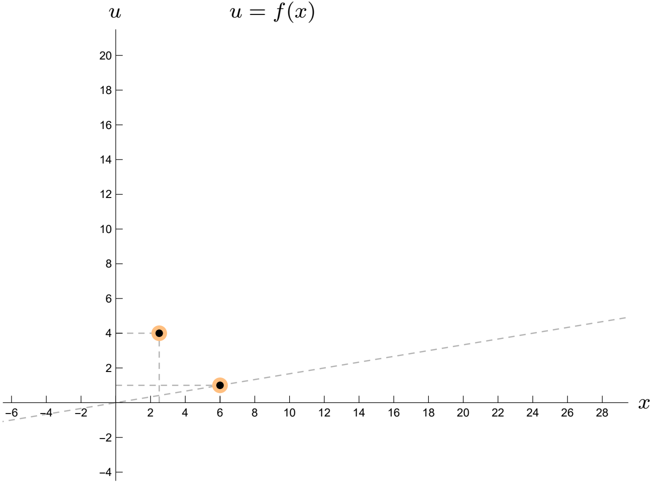


- $f(2.5) = 4, \qquad f(6) = 1$

Cauchyova rovnice

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \; f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \texttt{(C1)}$$

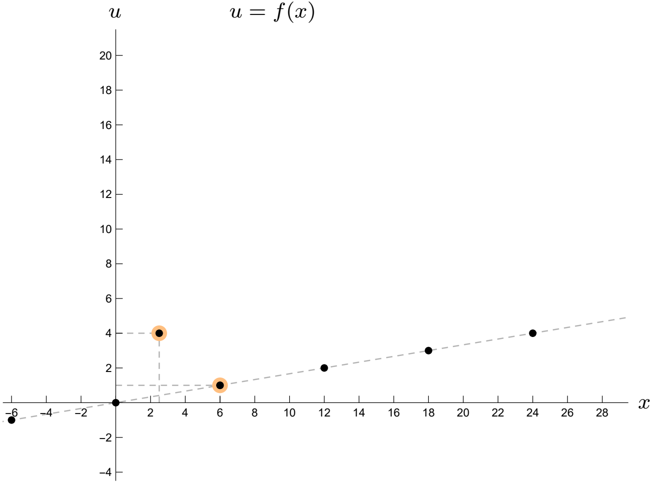
Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies \forall\, a \in \mathbb{R}\; \forall\, q \in \mathbb{Q}: \; f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$



- $f(2.5) = 4, \qquad f(6) = 1$

Cauchyova rovnice $\quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}:\ f(x+y) = f(x) + f(y) \quad$ (C1)

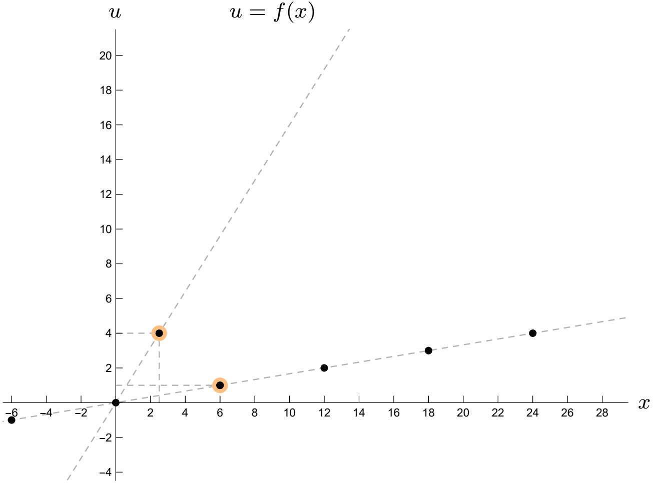
Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies \forall\, a \in \mathbb{R}\ \forall\, q \in \mathbb{Q}:\ f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$



- $f(2.5) = 4, \qquad f(6) = 1$
- $f(m_1 \cdot 6) = m_1 \cdot f(6), \quad m_1 \in \mathbb{Z}$

Cauchyova rovnice $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}: \; f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad$ (C1)

Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies \forall a \in \mathbb{R}\ \forall q \in \mathbb{Q}: \; f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$

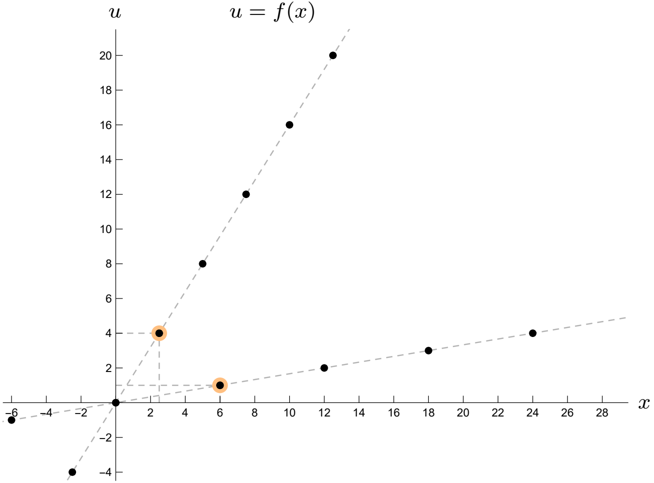


- $f(2.5) = 4, \qquad f(6) = 1$
- $f(m_1 \cdot 6) = m_1 \cdot f(6), \quad m_1 \in \mathbb{Z}$

Cauchyova rovnice

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \;\; f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{C1}$$

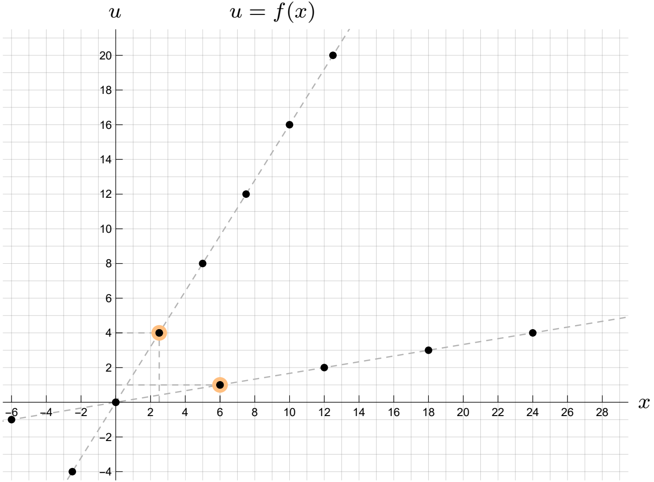
Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies$ $\forall\, a \in \mathbb{R}\; \forall\, q \in \mathbb{Q}: \;\; f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$



- $f(2.5) = 4, \qquad f(6) = 1$
- $f(m_1 \cdot 6) = m_1 \cdot f(6), \quad m_1 \in \mathbb{Z}$
- $f(m_2 \cdot 2.5) = m_2 \cdot f(2.5), \quad m_2 \in \mathbb{Z}$

Cauchyova rovnice $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}: \; f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad$ (C1)

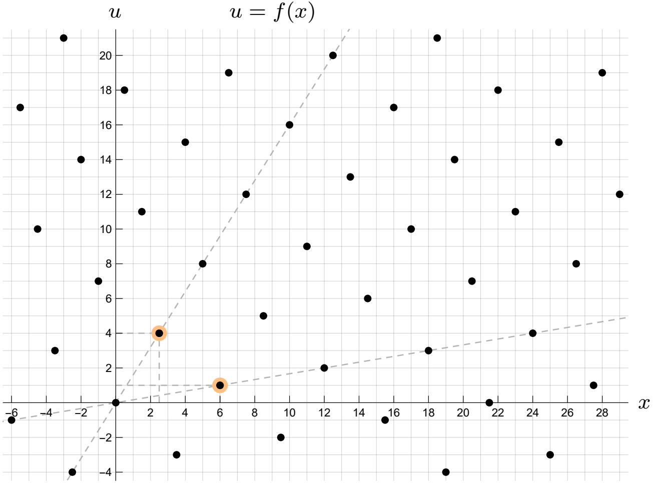
Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies \forall a \in \mathbb{R} \; \forall q \in \mathbb{Q}: \; f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$



- $f(2.5) = 4, \qquad f(6) = 1$
- $f(m_1 \cdot 6) = m_1 \cdot f(6), \quad m_1 \in \mathbb{Z}$
- $f(m_2 \cdot 2.5) = m_2 \cdot f(2.5), \quad m_2 \in \mathbb{Z}$

Cauchyova rovnice $\quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}: \; f(x+y) = f(x) + f(y) \quad$ (C1)

Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies \forall\, a \in \mathbb{R}\; \forall\, q \in \mathbb{Q}: \; f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$



- $f(2.5) = 4, \qquad f(6) = 1$
- $f(m_1 \cdot 6) = m_1 \cdot f(6), \quad m_1 \in \mathbb{Z}$
- $f(m_2 \cdot 2.5) = m_2 \cdot f(2.5), \quad m_2 \in \mathbb{Z}$
- $f(q_1 \cdot 6 + q_2 \cdot 2.5) = q_1 \cdot f(6) + q_2 \cdot f(2.5)$

kde

$q_1 = m_1,\; q_2 = m_2$ $\qquad$ $q_1 = \frac{m_1}{8},\; q_2 = \frac{m_2}{8}$

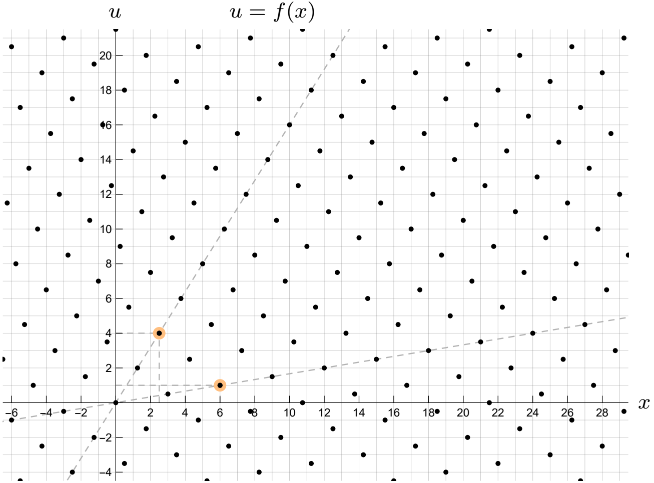
$q_1 = \frac{m_1}{2},\; q_2 = \frac{m_2}{2}$ $\qquad$ $q_1 = \frac{m_1}{16},\; q_2 = \frac{m_2}{16}$

$q_1 = \frac{m_1}{4},\; q_2 = \frac{m_2}{4}$ $\qquad$ $q_1 = \frac{m_1}{32},\; q_2 = \frac{m_2}{32}$

Cauchyova rovnice

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \;\; f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \texttt{(C1)}$$

Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies$ $\forall\, a \in \mathbb{R}\; \forall\, q \in \mathbb{Q}: \;\; f(q\cdot a) = q \cdot f(a)$



- $f(2.5) = 4, \qquad f(6) = 1$
- $f(m_1 \cdot 6) = m_1 \cdot f(6), \quad m_1 \in \mathbb{Z}$
- $f(m_2 \cdot 2.5) = m_2 \cdot f(2.5), \quad m_2 \in \mathbb{Z}$
- $f(q_1 \cdot 6 + q_2 \cdot 2.5) = q_1 \cdot f(6) + q_2 \cdot f(2.5)$

kde

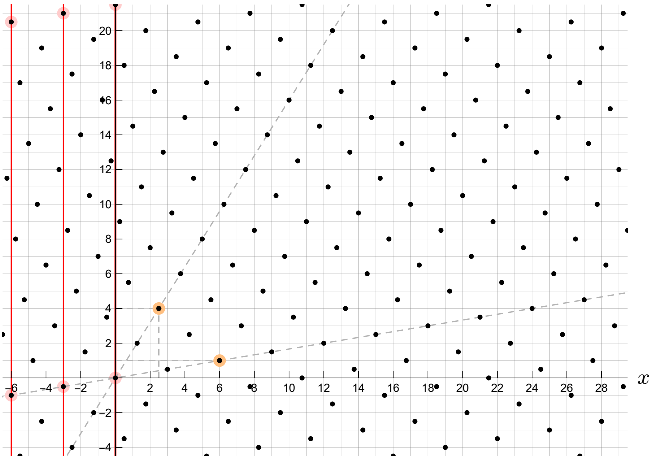
$q_1 = m_1,\; q_2 = m_2$ $\qquad$ $q_1 = \dfrac{m_1}{8},\; q_2 = \dfrac{m_2}{8}$

$q_1 = \dfrac{m_1}{2},\; q_2 = \dfrac{m_2}{2}$ $\qquad$ $q_1 = \dfrac{m_1}{16},\; q_2 = \dfrac{m_2}{16}$

$q_1 = \dfrac{m_1}{4},\; q_2 = \dfrac{m_2}{4}$ $\qquad$ $q_1 = \dfrac{m_1}{32},\; q_2 = \dfrac{m_2}{32}$

Cauchyova rovnice $\qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}: \;\; f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad$ (C1)

Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies \forall\, a \in \mathbb{R}\; \forall\, q \in \mathbb{Q}: \;\; f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$



- $f(2.5) = 4, \qquad f(6) = 1$
- $f(m_1 \cdot 6) = m_1 \cdot f(6), \quad m_1 \in \mathbb{Z}$
- $f(m_2 \cdot 2.5) = m_2 \cdot f(2.5), \quad m_2 \in \mathbb{Z}$
- $f(q_1 \cdot 6 + q_2 \cdot 2.5) = q_1 \cdot f(6) + q_2 \cdot f(2.5)$

kde

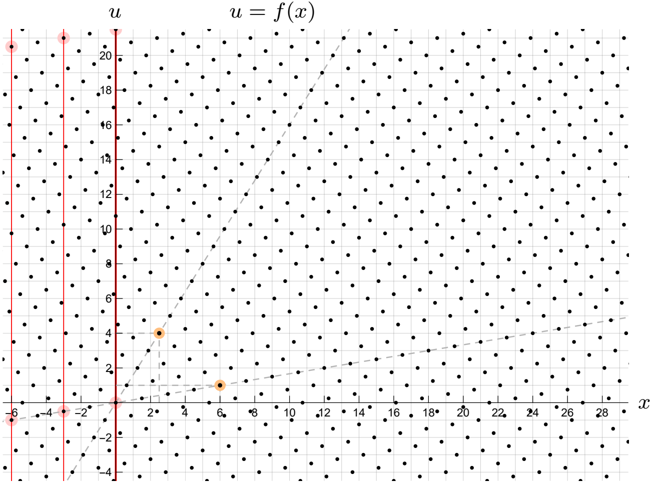
$q_1 = m_1,\; q_2 = m_2$ $\qquad$ $q_1 = \frac{m_1}{8},\; q_2 = \frac{m_2}{8}$

$q_1 = \frac{m_1}{2},\; q_2 = \frac{m_2}{2}$ $\qquad$ $q_1 = \frac{m_1}{16},\; q_2 = \frac{m_2}{16}$

$q_1 = \frac{m_1}{4},\; q_2 = \frac{m_2}{4}$ $\qquad$ $q_1 = \frac{m_1}{32},\; q_2 = \frac{m_2}{32}$

Cauchyova rovnice $\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \ f(x+y) = f(x) + f(y)$ (C1)

Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies$ $\forall\, a \in \mathbb{R}\ \forall\, q \in \mathbb{Q}: \ f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$



- $f(2.5) = 4, \qquad f(6) = 1$
- $f(m_1 \cdot 6) = m_1 \cdot f(6), \quad m_1 \in \mathbb{Z}$
- $f(m_2 \cdot 2.5) = m_2 \cdot f(2.5), \quad m_2 \in \mathbb{Z}$
- $f(q_1 \cdot 6 + q_2 \cdot 2.5) = q_1 \cdot f(6) + q_2 \cdot f(2.5)$

kde

$q_1 = m_1,\ q_2 = m_2$ $\qquad$ $q_1 = \frac{m_1}{8},\ q_2 = \frac{m_2}{8}$

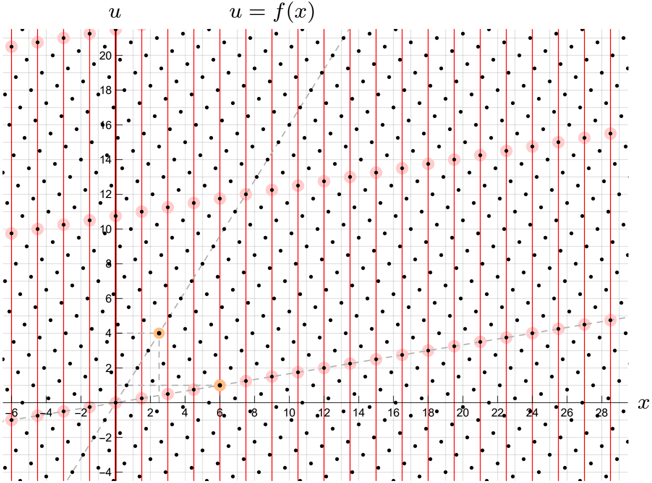
$q_1 = \frac{m_1}{2},\ q_2 = \frac{m_2}{2}$ $\qquad$ $q_1 = \frac{m_1}{16},\ q_2 = \frac{m_2}{16}$

$q_1 = \frac{m_1}{4},\ q_2 = \frac{m_2}{4}$ $\qquad$ $q_1 = \frac{m_1}{32},\ q_2 = \frac{m_2}{32}$

Cauchyova rovnice

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \;\; f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{C1}$$

Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies \forall\, a \in \mathbb{R}\; \forall\, q \in \mathbb{Q}: \;\; f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$



- $f(2.5) = 4, \qquad f(6) = 1$
- $f(m_1 \cdot 6) = m_1 \cdot f(6), \quad m_1 \in \mathbb{Z}$
- $f(m_2 \cdot 2.5) = m_2 \cdot f(2.5), \quad m_2 \in \mathbb{Z}$
- $f(q_1 \cdot 6 + q_2 \cdot 2.5) = q_1 \cdot f(6) + q_2 \cdot f(2.5)$

kde

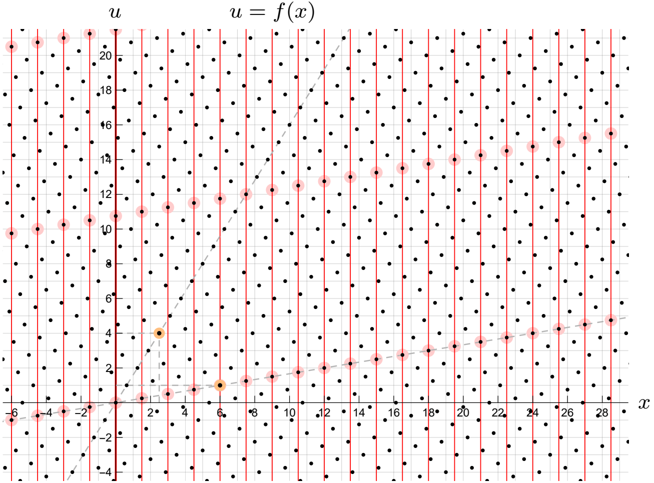
$q_1 = m_1,\; q_2 = m_2$ $\qquad$ $q_1 = \dfrac{m_1}{8},\; q_2 = \dfrac{m_2}{8}$

$q_1 = \dfrac{m_1}{2},\; q_2 = \dfrac{m_2}{2}$ $\qquad$ $q_1 = \dfrac{m_1}{16},\; q_2 = \dfrac{m_2}{16}$

$q_1 = \dfrac{m_1}{4},\; q_2 = \dfrac{m_2}{4}$ $\qquad$ $q_1 = \dfrac{m_1}{32},\; q_2 = \dfrac{m_2}{32}$

Cauchyova rovnice $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}: \; f(x+y) = f(x) + f(y) \quad$ (C1)

Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies \forall a \in \mathbb{R} \; \forall q \in \mathbb{Q}: \; f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$



- $f(2.5) = 4, \qquad f(6) = 1$
- $f(m_1 \cdot 6) = m_1 \cdot f(6), \quad m_1 \in \mathbb{Z}$
- $f(m_2 \cdot 2.5) = m_2 \cdot f(2.5), \quad m_2 \in \mathbb{Z}$
- $f(q_1 \cdot 6 + q_2 \cdot 2.5) = q_1 \cdot f(6) + q_2 \cdot f(2.5)$

kde

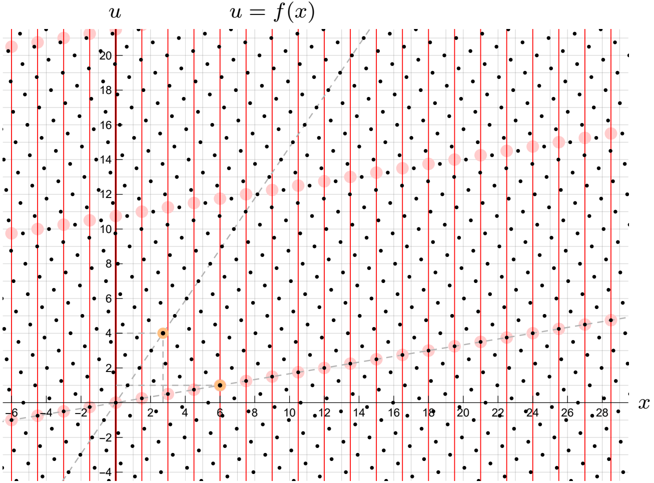
$q_1 = m_1, \; q_2 = m_2$ $\qquad q_1 = \frac{m_1}{8}, \; q_2 = \frac{m_2}{8}$

$q_1 = \frac{m_1}{2}, \; q_2 = \frac{m_2}{2}$ $\qquad q_1 = \frac{m_1}{16}, \; q_2 = \frac{m_2}{16}$

$q_1 = \frac{m_1}{4}, \; q_2 = \frac{m_2}{4}$ $\qquad q_1 = \frac{m_1}{32}, \; q_2 = \frac{m_2}{32}$

Cauchyova rovnice $\quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}: \ f(x+y) = f(x) + f(y) \quad$ (C1)

Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies \forall\, a \in \mathbb{R}\ \forall\, q \in \mathbb{Q}: \ f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$



- $f(\mathrm{e}) = 4, \quad f(6) = 1$
- $f(m_1 \cdot 6) = m_1 \cdot f(6), \quad m_1 \in \mathbb{Z}$
- $f(m_2 \cdot \mathrm{e}) = m_2 \cdot f(\mathrm{e}), \quad m_2 \in \mathbb{Z}$
- $f(q_1 \cdot 6 + q_2 \cdot \mathrm{e}) = q_1 \cdot f(6) + q_2 \cdot f(\mathrm{e})$

kde

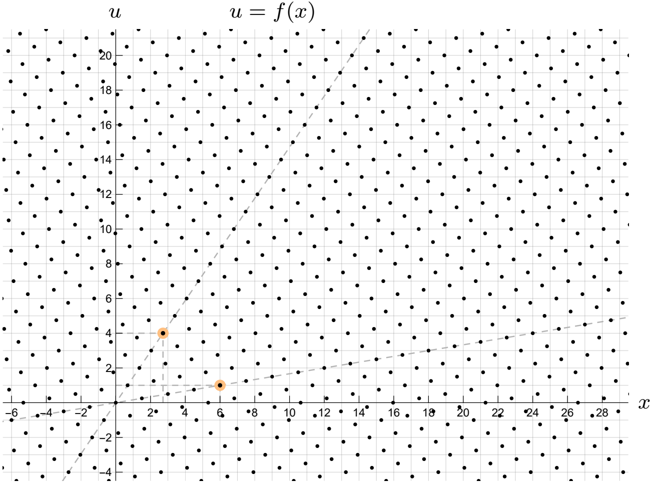
$q_1 = m_1,\ q_2 = m_2$ $\qquad$ $q_1 = \frac{m_1}{8},\ q_2 = \frac{m_2}{8}$

$q_1 = \frac{m_1}{2},\ q_2 = \frac{m_2}{2}$ $\qquad$ $q_1 = \frac{m_1}{16},\ q_2 = \frac{m_2}{16}$

$q_1 = \frac{m_1}{4},\ q_2 = \frac{m_2}{4}$ $\qquad$ $q_1 = \frac{m_1}{32},\ q_2 = \frac{m_2}{32}$

Cauchyova rovnice $\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \ f(x+y) = f(x) + f(y)$ (C1)

Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies$ $\forall\, a \in \mathbb{R}\ \forall\, q \in \mathbb{Q}: \ f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$



- $f(\mathrm{e}) = 4,$ $\quad f(6) = 1$
- $f(m_1 \cdot 6) = m_1 \cdot f(6), \quad m_1 \in \mathbb{Z}$
- $f(m_2 \cdot \mathrm{e}) = m_2 \cdot f(\mathrm{e}), \quad m_2 \in \mathbb{Z}$
- $f(q_1 \cdot 6 + q_2 \cdot \mathrm{e}) = q_1 \cdot f(6) + q_2 \cdot f(\mathrm{e})$

kde

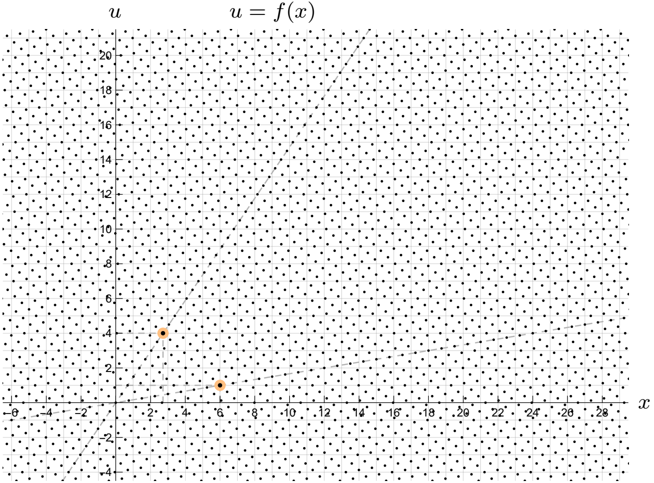
$q_1 = m_1,\ q_2 = m_2$ $\qquad$ $q_1 = \dfrac{m_1}{8},\ q_2 = \dfrac{m_2}{8}$

$q_1 = \dfrac{m_1}{2},\ q_2 = \dfrac{m_2}{2}$ $\qquad$ $q_1 = \dfrac{m_1}{16},\ q_2 = \dfrac{m_2}{16}$

$q_1 = \dfrac{m_1}{4},\ q_2 = \dfrac{m_2}{4}$ $\qquad$ $q_1 = \dfrac{m_1}{32},\ q_2 = \dfrac{m_2}{32}$

Cauchyova rovnice $\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \;\; f(x+y) = f(x) + f(y)$ (C1)

Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\Longrightarrow$ $\forall\, a \in \mathbb{R}\ \forall\, q \in \mathbb{Q}: \;\; f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$



- $f(\mathrm{e}) = 4,$ $\quad f(6) = 1$
- $f(m_1 \cdot 6) = m_1 \cdot f(6), \quad m_1 \in \mathbb{Z}$
- $f(m_2 \cdot \mathrm{e}) = m_2 \cdot f(\mathrm{e}), \quad m_2 \in \mathbb{Z}$
- $f(q_1 \cdot 6 + q_2 \cdot \mathrm{e}) = q_1 \cdot f(6) + q_2 \cdot f(\mathrm{e})$

kde

$q_1 = m_1,\ q_2 = m_2$ $\qquad q_1 = \dfrac{m_1}{8},\ q_2 = \dfrac{m_2}{8}$

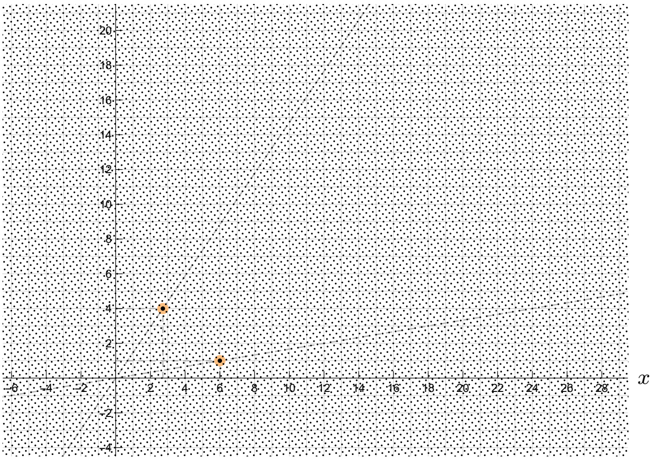
$q_1 = \dfrac{m_1}{2},\ q_2 = \dfrac{m_2}{2}$ $\qquad q_1 = \dfrac{m_1}{16},\ q_2 = \dfrac{m_2}{16}$

$q_1 = \dfrac{m_1}{4},\ q_2 = \dfrac{m_2}{4}$ $\qquad q_1 = \dfrac{m_1}{32},\ q_2 = \dfrac{m_2}{32}$

Cauchyova rovnice

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \ f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \texttt{(C1)}$$

Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies \forall\, a \in \mathbb{R}\ \forall\, q \in \mathbb{Q}: \ f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$



- $f(\mathrm{e}) = 4,\qquad f(6) = 1$
- $f(m_1 \cdot 6) = m_1 \cdot f(6),\quad m_1 \in \mathbb{Z}$
- $f(m_2 \cdot \mathrm{e}) = m_2 \cdot f(\mathrm{e}),\quad m_2 \in \mathbb{Z}$
- $f(q_1 \cdot 6 + q_2 \cdot \mathrm{e}) = q_1 \cdot f(6) + q_2 \cdot f(\mathrm{e})$

kde

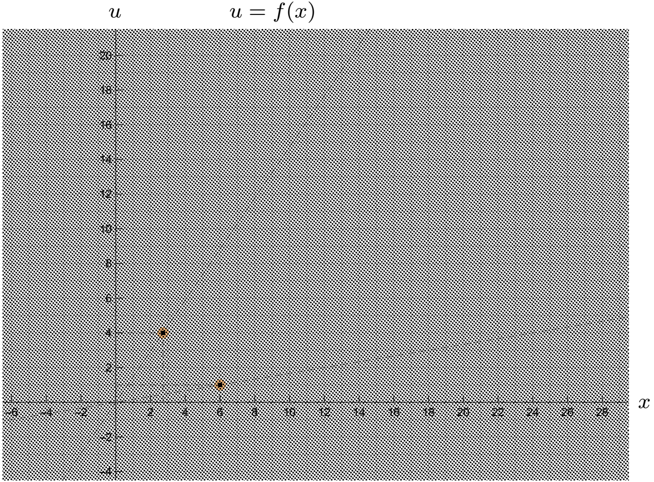
$q_1 = m_1,\ q_2 = m_2$ $\qquad q_1 = \dfrac{m_1}{8},\ q_2 = \dfrac{m_2}{8}$

$q_1 = \dfrac{m_1}{2},\ q_2 = \dfrac{m_2}{2}$ $\qquad q_1 = \dfrac{m_1}{16},\ q_2 = \dfrac{m_2}{16}$

$q_1 = \dfrac{m_1}{4},\ q_2 = \dfrac{m_2}{4}$ $\qquad q_1 = \dfrac{m_1}{32},\ q_2 = \dfrac{m_2}{32}$

Cauchyova rovnice $\quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}: \ f(x+y) = f(x) + f(y) \quad$ (C1)

Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\implies \forall\, a \in \mathbb{R}\ \forall\, q \in \mathbb{Q}: \ f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$



- $f(\mathrm{e}) = 4, \qquad f(6) = 1$
- $f(m_1 \cdot 6) = m_1 \cdot f(6), \quad m_1 \in \mathbb{Z}$
- $f(m_2 \cdot \mathrm{e}) = m_2 \cdot f(\mathrm{e}), \quad m_2 \in \mathbb{Z}$
- $f(q_1 \cdot 6 + q_2 \cdot \mathrm{e}) = q_1 \cdot f(6) + q_2 \cdot f(\mathrm{e})$

kde

$q_1 = m_1, \ q_2 = m_2 \qquad q_1 = \frac{m_1}{8}, \ q_2 = \frac{m_2}{8}$

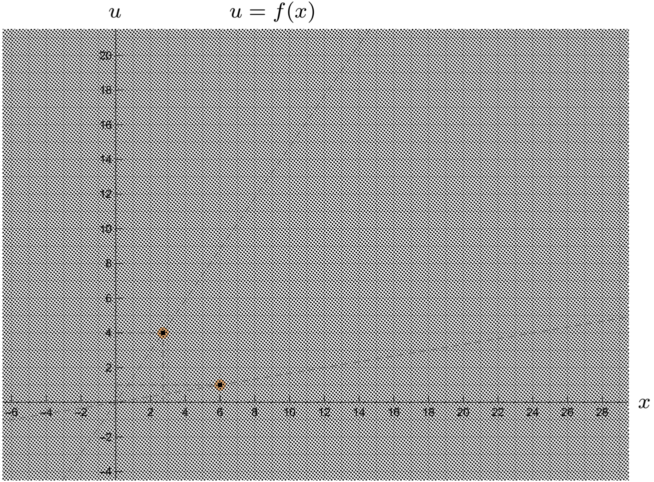
$q_1 = \frac{m_1}{2}, \ q_2 = \frac{m_2}{2} \qquad q_1 = \frac{m_1}{16}, \ q_2 = \frac{m_2}{16}$

$q_1 = \frac{m_1}{4}, \ q_2 = \frac{m_2}{4} \qquad q_1 = \frac{m_1}{32}, \ q_2 = \frac{m_2}{32}$

Cauchyova rovnice

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \; f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{(C1)}$$

Tvrzení 4: f je řešením Cauchyovy rovnice $\Longrightarrow$ $\forall\, a \in \mathbb{R}\; \forall\, q \in \mathbb{Q}: \; f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$



- $f(\mathrm{e}) = 4, \qquad f(6) = 1$
- $f(m_1 \cdot 6) = m_1 \cdot f(6), \quad m_1 \in \mathbb{Z}$
- $f(m_2 \cdot \mathrm{e}) = m_2 \cdot f(\mathrm{e}), \quad m_2 \in \mathbb{Z}$
- $f(q_1 \cdot 6 + q_2 \cdot \mathrm{e}) = q_1 \cdot f(6) + q_2 \cdot f(\mathrm{e})$

- předpokládejme, že platí

$$q_1 \cdot 6 + q_2 \cdot \mathrm{e} \;=\; q_3 \cdot 6 + q_4 \cdot \mathrm{e}$$
$$\underbrace{(q_1 - q_3) \cdot 6}_{\text{racionální číslo}} \;=\; \underbrace{(q_4 - q_2) \cdot \mathrm{e}}_{\substack{\text{iracionální číslo} \\ \text{pro } q_4 \neq q_2}}$$

- potom tedy nutně $q_4 = q_2$ a $q_1 = q_3$

Cauchyova rovnice $$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \; f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{C1}$$

Tvrzení 5: f je řešením (C1) a grafem f není přímka $\implies$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{libovolně blízko každého bodu v rovině} \\ \text{existuje nějaký bod grafu funkce } f \end{array} \right.$

Cauchyova rovnice $\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \; f(x+y) = f(x) + f(y)$ (C1)

Tvrzení 5: f je řešením (C1) a grafem f není přímka $\Longrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{libovolně blízko každého bodu v rovině} \\ \text{existuje nějaký bod grafu funkce } f \end{array} \right.$

Důsledek 1: f je řešením (C1) a je <u>shora omezená</u> na intervalu $\Longrightarrow$ grafem f je přímka

Cauchyova rovnice

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \; f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{(C1)}$$

Tvrzení 5: f je řešením (C1) a grafem f není přímka $\Longrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l}\text{libovolně blízko každého bodu v rovině} \\ \text{existuje nějaký bod grafu funkce } f\end{array}\right.$

Důsledek 1: f je řešením (C1) a je <u>shora omezená</u> na intervalu $\Longrightarrow$ grafem f je přímka

Důkaz (sporem): přepodkládejme, že

- f je shora omezená na nějakém intervalu $I = (a, b)$

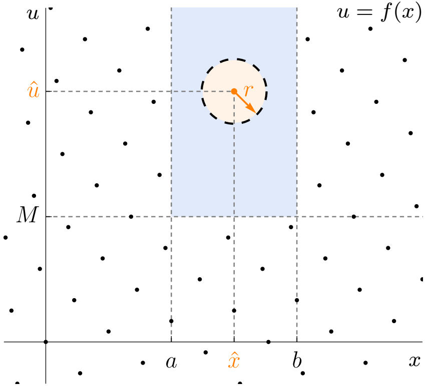
  $\exists\, M \in \mathbb{R}\; \forall x \in (a, b): \; f(x) \leq M$
- f je řešením (C1) a grafem f <u>není</u> přímka

dále označme $\hat{x} := \frac{a+b}{2}$ $\quad \hat{u} := M + b - a$ $\quad r := \frac{b-a}{4}$

a máme

- v kruhu se středem v bodě $(\hat{x}, \hat{u})$ a s poloměrem r není žádný bod grafu funkce f
- libovolně blízko bodu $(\hat{x}, \hat{u})$ existuje bod grafu funkce f

spor ■



Cauchyova rovnice $\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \; f(x+y) = f(x) + f(y)$ (C1)

Tvrzení 5: f je řešením (C1) a grafem f není přímka $\implies$ $\left\{\begin{array}{l}\text{libovolně blízko každého bodu v rovině}\\ \text{existuje nějaký bod grafu funkce } f\end{array}\right.$

Důsledek 1: f je řešením (C1) a je <u>shora omezená</u> na intervalu $\implies$ grafem f je přímka

Důsledek 2: f je řešením (C1) a je <u>zdola omezená</u> na intervalu $\implies$ grafem f je přímka

Cauchyova rovnice $\quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}: \; f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad$ (C1)

Tvrzení 5: f je řešením (C1) a grafem f není přímka $\implies$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{libovolně blízko každého bodu v rovině} \\ \text{existuje nějaký bod grafu funkce } f \end{array} \right.$

Důsledek 1: f je řešením (C1) a je shora omezená na intervalu $\implies$ grafem f je přímka

Důsledek 2: f je řešením (C1) a je zdola omezená na intervalu $\implies$ grafem f je přímka

Důsledek 3: f je řešením (C1) a je monotónní na intervalu $\implies$ grafem f je přímka

Cauchyova rovnice

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} : \; f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \texttt{(C1)}$$

Tvrzení 5: f je řešením (C1) a grafem f není přímka $\implies$ $\left\{\begin{array}{l}\text{libovolně blízko každého bodu v rovině} \\ \text{existuje nějaký bod grafu funkce } f\end{array}\right.$

Důsledek 1: f je řešením (C1) a je <u>shora omezená</u> na intervalu $\implies$ grafem f je přímka

Důsledek 2: f je řešením (C1) a je <u>zdola omezená</u> na intervalu $\implies$ grafem f je přímka

Důsledek 3: f je řešením (C1) a je <u>monotónní</u> na intervalu $\implies$ grafem f je přímka

Důkaz:

- předpokládejme, že f je nerostoucí na nějakém intervalu $I = (a, b)$

  $\forall\, x_1, x_2 \in (a, b) : \quad x_1 < x_2 \quad \implies \quad f(x_1) \geq f(x_2)$

- potom f je shora omezená na libovolném intervalu $\langle c, d\rangle \subset (a, b)$, neboť

  $\forall\, x \in \langle c, d\rangle : \; f(c) \geq f(x)$

- díky Důsledku 1 tak máme, že grafem funkce f je přímka

∎

Cauchyova rovnice $$\forall x, y \in \mathbb{R}: \; f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \texttt{(C1)}$$

Tvrzení 5: f je řešením (C1) a grafem f není přímka $\implies$ $\left\{\begin{array}{l}\text{libovolně blízko každého bodu v rovině}\\ \text{existuje nějaký bod grafu funkce } f\end{array}\right.$

Důsledek 1: f je řešením (C1) a je <u>shora omezená</u> na intervalu $\implies$ grafem f je přímka

Důsledek 2: f je řešením (C1) a je <u>zdola omezená</u> na intervalu $\implies$ grafem f je přímka

Důsledek 3: f je řešením (C1) a je <u>monotónní</u> na intervalu $\implies$ grafem f je přímka

Důsledek 4: f je řešením (C1) a je <u>spojitá</u> v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ $\implies$ grafem f je přímka

Cauchyova rovnice

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \; f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{C1}$$

Tvrzení 5: f je řešením (C1) a grafem f není přímka $\implies \left\{ \begin{array}{l} \text{libovolně blízko každého bodu v rovině} \\ \text{existuje nějaký bod grafu funkce } f \end{array} \right.$

Důsledek 1: f je řešením (C1) a je <u>shora omezená</u> na intervalu $\implies$ grafem f je přímka

Důsledek 2: f je řešením (C1) a je <u>zdola omezená</u> na intervalu $\implies$ grafem f je přímka

Důsledek 3: f je řešením (C1) a je <u>monotónní</u> na intervalu $\implies$ grafem f je přímka

Důsledek 4: f je řešením (C1) a je <u>spojitá</u> v bodě $x_0 \in \mathbb{R} \implies$ grafem f je přímka

Důkaz:

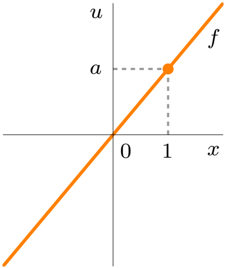
- BÚNO předpokládejme, že f je spojitá v bodě 0
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \quad -\delta < x < \delta \quad \implies \quad f(0) - \varepsilon < f(x) < f(0) + \varepsilon$$
- pro $\varepsilon = 1$ tak máme $\quad \exists \delta > 0: \quad -\delta < x < \delta \quad \implies \quad f(0) - 1 < f(x) < f(0) + 1$
- tedy f je shora (i zdola) omezená na intervalu $(-\delta, \delta)$
- díky Důsledku 1 tak máme, že grafem funkce f je přímka ∎

Cauchyovy rovnice

Přepodkládejme, že pro $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí

- $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$:
$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad \texttt{(C1)}$$
- $f(1) = a, \quad$ kde $a \in \mathbb{R}$,
- f je spojitá v bodě 1.

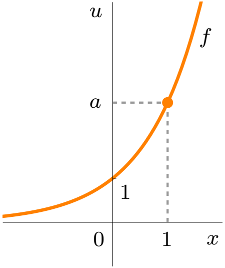
Potom $f(x) = a \cdot x, \qquad x \in \mathbb{R}$.



Přepodkládejme, že pro $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí

- $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$:
$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \qquad \texttt{(C2)}$$
- $f(1) = a, \quad$ kde $a > 0$,
- f je spojitá v bodě 1.

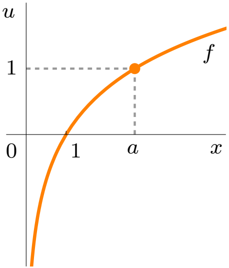
Potom $f(x) = a^x, \qquad x \in \mathbb{R}$.



Přepodkládejme, že pro $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ platí

- $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^+$:
$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y), \qquad \texttt{(C3)}$$
- $f(a) = 1, \quad$ kde $a > 0,\ a \neq 1$,
- f je spojitá v bodě a.

Potom $f(x) = \log_a x, \qquad x \in \mathbb{R}^+$.



FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY V PLZNI

www.KMA.zcu.cz SINCE 1954

Funkcionální rovnice

2. část

Petr Nečesal

Katedra matematiky FAV ZČU

pnecesal@kma.zcu.cz

https://home.zcu.cz/~pnecesal/2_718281828459045235360287

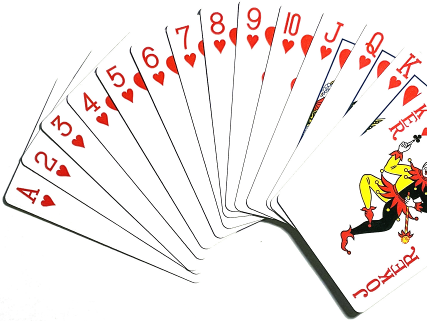
Semináře (nejen) k MO a pro všechny zájemce o matematiku

5. dubna 2024

Faktoriál přirozeného čísla n

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$$

$$\begin{aligned}
1! &= 1 &&= 1\\
2! &= 1 \cdot 2 &&= 2\\
3! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 &&= 6\\
4! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 &&= 24\\
5! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 &&= 120\\
6! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 &&= 720\\
7! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 &&= 5\,040\\
8! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 &&= 40\,320\\
9! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 &&= 362\,880\\
10! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 &&= 3\,628\,800\\
11! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 &&= 39\,916\,800\\
12! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 &&= 479\,001\,600\\
13! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 &&= 6\,227\,020\,800\\
14! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 &&= 87\,178\,291\,200
\end{aligned}$$

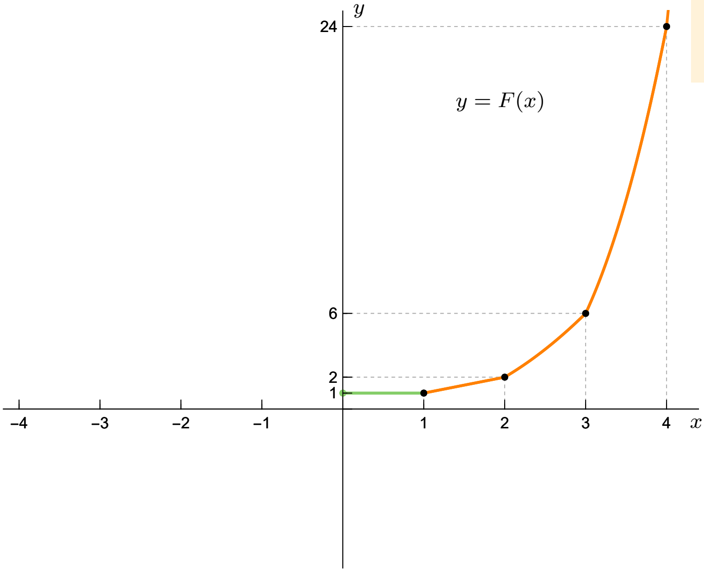


▶ $4.5! = ???$

Tvrzení: Pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ platí $n! = n \cdot (n-1)!$

Poznámka: Pokud definujeme $0! := 1$, potom rekurentní vztah $n! = n \cdot (n-1)!$ platí i pro $n = 1$.

Rozšiřování n-faktoriálu



- pro $0 \leq x < 1$ definujme
  $$F(x) := 1$$
  a požadujme splnění funkcionální rovnice
  $$F(x) = x \cdot F(x-1) \qquad \text{pro } x \geq 1$$

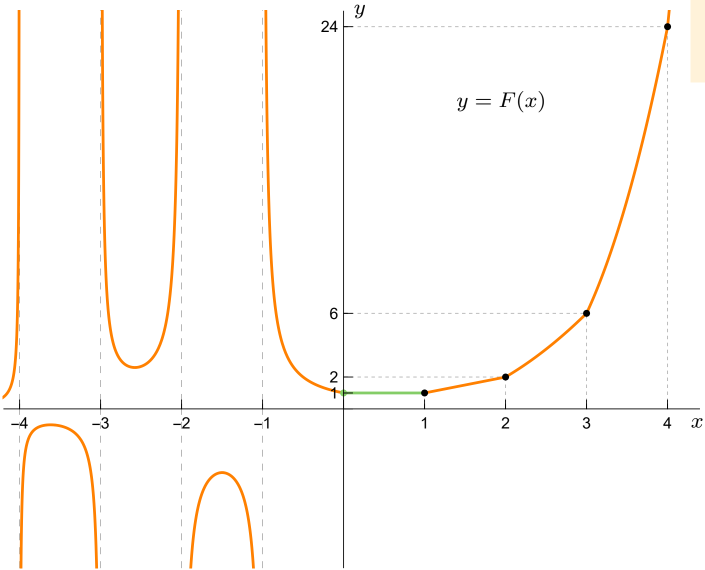
- pro $1 \leq x < 2$ máme
  $$\begin{aligned} F(x) &= x \cdot F(x-1) \\ &= x \cdot 1 \end{aligned}$$

- pro $2 \leq x < 3$ máme
  $$\begin{aligned} F(x) &= x \cdot F(x-1) \\ &= x \cdot (x-1) \cdot F(x-2) \\ &= x \cdot (x-1) \cdot 1 \end{aligned}$$

- pro $3 \leq x < 4$ máme
  $$\begin{aligned} F(x) &= x \cdot F(x-1) \\ &= x \cdot (x-1) \cdot F(x-2) \\ &= x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot F(x-3) \\ &= x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot 1 \end{aligned}$$

- pro $n \leq x < n+1$, $n \in \mathbb{N}$, máme
  $$\begin{aligned} F(x) &= x \cdot (x-1) \cdots (x-n+1) \cdot F(x-n) \\ &= x \cdot (x-1) \cdots (x-n+1) \cdot 1 \end{aligned}$$

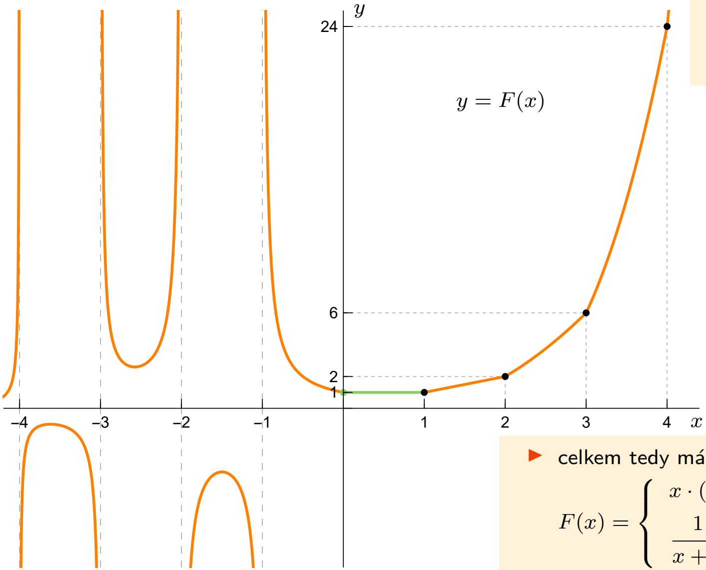
Rozšiřování n-faktoriálu



- pro $0 \le x < 1$ definujme
  $$F(x) := 1$$
  a požadujme splnění funkcionální rovnice
  $$F(x) = x \cdot F(x-1) \qquad \text{pro } x \neq 0$$

- dosadíme $(x+1)$ za x
  $$F(x+1) = (x+1) \cdot F(x) \qquad \text{pro } x \neq -1$$
  a vyjádříme
  $$F(x) = \frac{1}{x+1} \cdot F(x+1) \qquad \text{pro } x \neq -1$$
- pro $-1 < x < 0$ máme
  $$F(x) = \frac{1}{x+1} \cdot F(x+1) = \frac{1}{x+1} \cdot 1$$
- pro $-2 < x < -1$ máme
  $$F(x) = \frac{1}{x+1} \cdot F(x+1) = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x+2} \cdot 1$$
- pro $-3 < x < -2$ máme
  $$F(x) = \frac{1}{x+1} \cdot F(x+1) = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x+2} \cdot \frac{1}{x+3} \cdot 1$$
- pro $-n < x < -n+1$, $n \in \mathbb{N}$, máme
  $$F(x) = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x+2} \cdots \frac{1}{x+n} \cdot 1$$

Rozšiřování n-faktoriálu



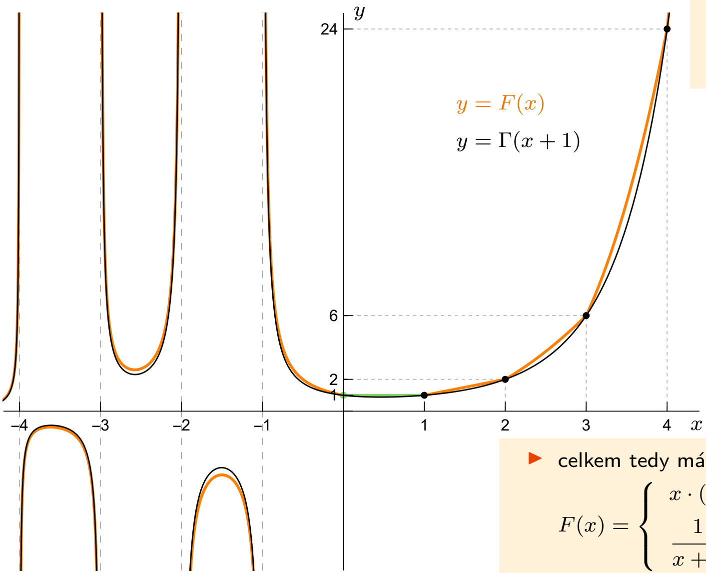
- pro $0 \leq x < 1$ definujme
  $$F(x) := 1, \quad F(-1) := \infty,$$
  a požadujme splnění funkcionální rovnice
  $$F(x) = x \cdot F(x-1) \qquad \text{pro } x \neq 0$$

- pro $n \leq x < n+1$, $n \in \mathbb{N}$, máme
  $$F(x) = x \cdot (x-1) \cdots (x-n+1) \cdot 1$$
  a také $n = \lfloor x \rfloor$ a tedy pro $x \geq 1$ máme
  $$F(x) = x \cdot (x-1) \cdots (x - \lfloor x \rfloor + 1) \cdot 1$$

- a pro $-n < x < -n+1$, $n \in \mathbb{N}$, máme
  $$F(x) = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x+2} \cdots \frac{1}{x+n} \cdot 1$$
  a také $n = -\lfloor x \rfloor$ a pro $x < 0$ máme
  $$F(x) = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x+2} \cdots \frac{1}{x-\lfloor x \rfloor} \cdot 1$$

- celkem tedy máme
  $$F(x) = \begin{cases} x \cdot (x-1) \cdots (x - \lfloor x \rfloor + 1) \cdot 1 & \text{pro } x \geq 1 \\ \dfrac{1}{x+1} \cdot \dfrac{1}{x+2} \cdots \dfrac{1}{x - \lfloor x \rfloor} \cdot 1 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

Rozšiřování n-faktoriálu



- pro $0 \le x < 1$ definujme

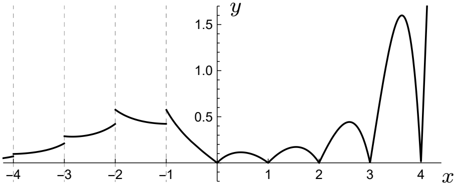
$$F(x) := 1, \quad F(-1) := \infty,$$

a požadujme splnění funkcionální rovnice

$$F(x) = x \cdot F(x-1) \qquad \text{pro } x \neq 0$$

- porovnání s Gamma funkcí Γ

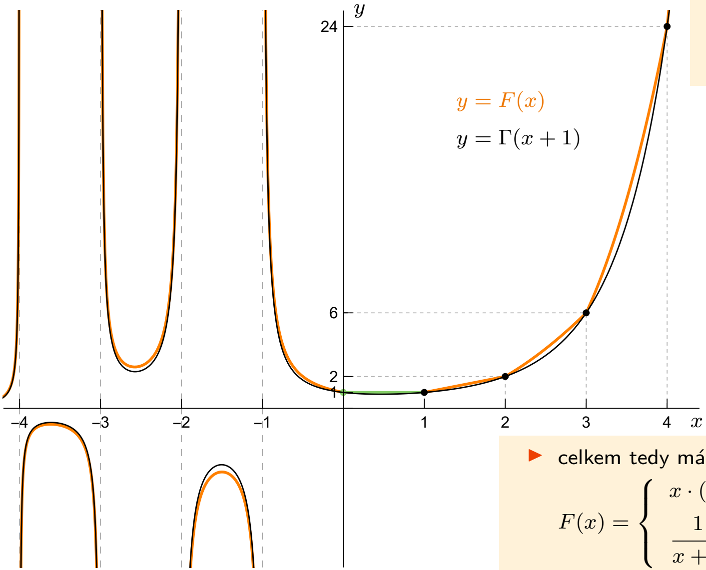
$$y = |F(x) - \Gamma(x+1)|$$



- celkem tedy máme

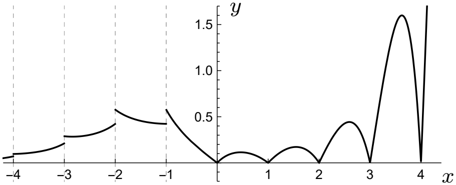
$$F(x) = \begin{cases} x \cdot (x-1) \cdots (x - \lfloor x \rfloor + 1) \cdot 1 & \text{pro } x \ge 1 \\ \dfrac{1}{x+1} \cdot \dfrac{1}{x+2} \cdots \dfrac{1}{x - \lfloor x \rfloor} \cdot 1 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

Rozšiřování n-faktoriálu



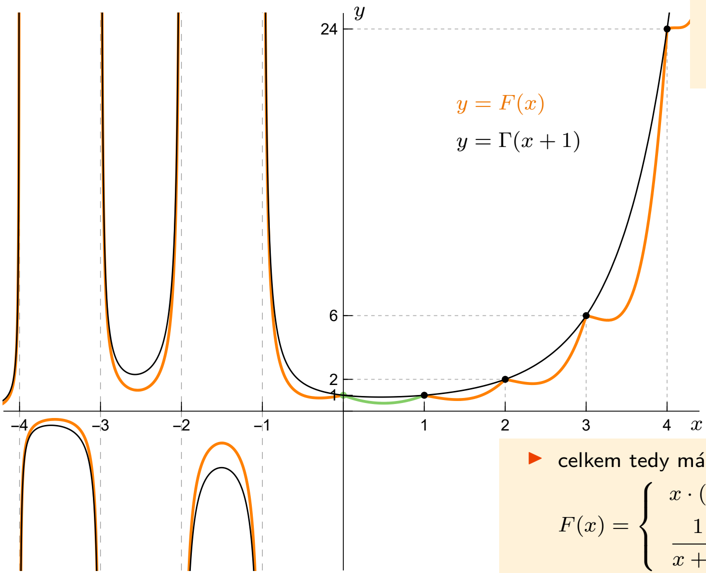
- pro $0 \leq x < 1$ definujme
  $$\underline{F(x) := 1}, \quad F(-1) := \infty,$$
  a požadujme splnění funkcionální rovnice
  $$F(x) = x \cdot F(x-1) \qquad \text{pro } x \neq 0$$

- porovnání s Gamma funkcí Γ
  $$y = |F(x) - \Gamma(x+1)|$$



- celkem tedy máme
  $$F(x) = \begin{cases} x \cdot (x-1) \cdots (x - \lfloor x \rfloor + 1) \cdot \underline{F(x - \lfloor x \rfloor)} & \text{pro } x \geq 1 \\ \dfrac{1}{x+1} \cdot \dfrac{1}{x+2} \cdots \dfrac{1}{x - \lfloor x \rfloor} \cdot \underline{F(x - \lfloor x \rfloor)} & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

Rozšiřování n-faktoriálu



- pro $0 \leq x < 1$ definujme

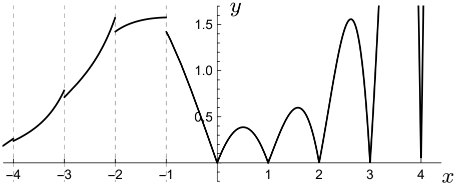
$$\underline{F(x) := 1 + 2x(x-1)}, \quad F(-1) := \infty,$$

a požadujme splnění funkcionální rovnice

$$F(x) = x \cdot F(x-1) \qquad \text{pro } x \neq 0$$

- porovnání s Gamma funkcí Γ

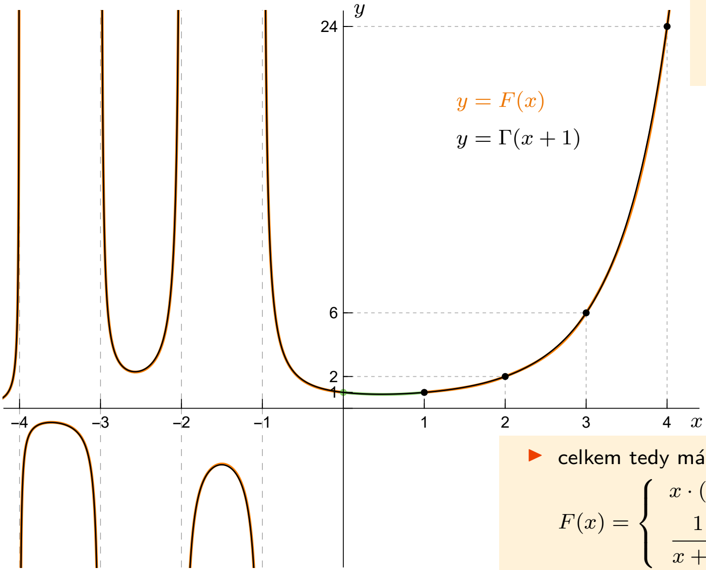
$$y = |F(x) - \Gamma(x+1)|$$



- celkem tedy máme

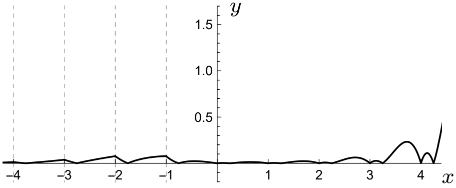
$$F(x) = \begin{cases} x \cdot (x-1) \cdots (x - \lfloor x \rfloor + 1) \cdot \underline{F(x - \lfloor x \rfloor)} & \text{pro } x \geq 1 \\ \dfrac{1}{x+1} \cdot \dfrac{1}{x+2} \cdots \dfrac{1}{x - \lfloor x \rfloor} \cdot \underline{F(x - \lfloor x \rfloor)} & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

Rozšiřování n-faktoriálu



- pro $0 \le x < 1$ definujme
  $$\underline{F(x) := 1 + 0.5x(x-1)}, \quad F(-1) := \infty,$$
  a požadujme splnění funkcionální rovnice
  $$F(x) = x \cdot F(x-1) \qquad \text{pro } x \neq 0$$

- porovnání s Gamma funkcí Γ
  $$y = |F(x) - \Gamma(x+1)|$$



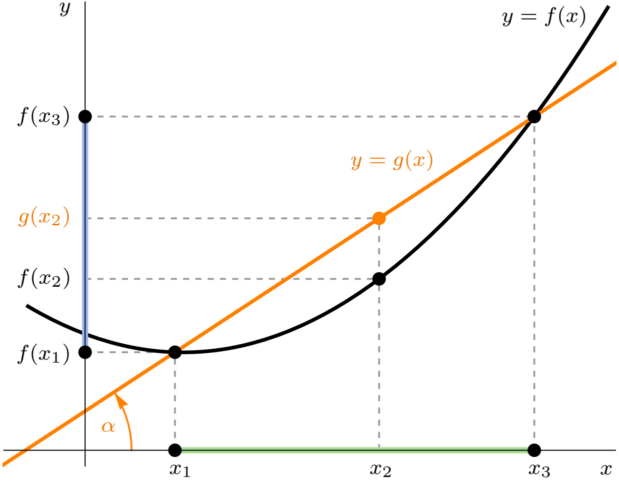
- celkem tedy máme
  $$F(x) = \begin{cases} x \cdot (x-1) \cdots (x - \lfloor x \rfloor + 1) \cdot \underline{F(x - \lfloor x \rfloor)} & \text{pro } x \geq 1 \\ \dfrac{1}{x+1} \cdot \dfrac{1}{x+2} \cdots \dfrac{1}{x - \lfloor x \rfloor} \cdot \underline{F(x - \lfloor x \rfloor)} & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

Postup rozšiřování n-faktoriálu

- **Definice** konvexity a logaritmické konvexity funkce f na množině M.
- **Tvrzení 1:** funkce f je konvexní na intervalu (a, b) $\implies$ funkce f je spojitá na (a, b).
- **Tvrzení 2 (Youngova nerovnost)**
- **Tvrzení 3:** funkce f je logaritmicky konvexní na M $\implies$ f je konvexní na M.
- **Tvrzení 4:** Funkce $f(n) = n!$ je logaritmicky konvexní na $\mathbb{N}_0$.
- **Tvrzení 5:** Existuje právě jedna funkce $F : (-1, +\infty) \to (0, +\infty)$, pro kterou platí
  1. $F(0) = 1$ a $F(x) = x \cdot F(x-1)$ pro všechna $x > 0$,
  2. F je logaritmicky konvexní na $(-1, +\infty)$.
- **Poznámka:** Funkce F ve Tvrzení 5 je konvexní na intervalu $(-1, +\infty)$, a tedy i spojitá funkce na intervalu $(-1, +\infty)$.

Definice: Funkce f je <u>konvexní na množině</u> $M \subset D(f)$, pokud pro všechna $x_1, x_2, x_3 \in M$ taková, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \cdot f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \cdot f(x_3)$$



- snadno ověříme, že platí

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = 1$$

- upravme tedy nerovnost

$$f(x_2) \leq \left(1 - \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\right) \cdot f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \cdot f(x_3)$$

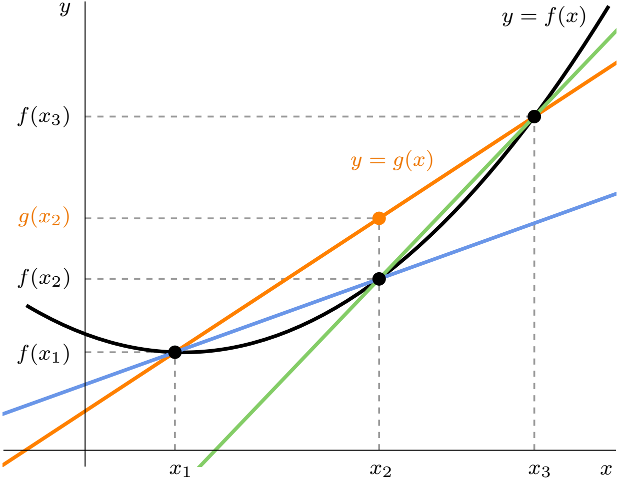
$$f(x_2) \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \cdot (x_2 - x_1) + f(x_1) =: g(x_2)$$

- směrnice sečny je tedy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

Lemma: Mějme funkci f, která je konvexní na množině $M \subset D(f)$. Potom pro $x_1, x_2, x_3 \in M$ taková, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$



Důkaz:

- upravme nerovnost

$$f(x_2) \le g(x_2)$$

$$f(x_2) \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\cdot(x_2-x_1)+f(x_1)$$

$$f(x_2)-f(x_1) \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\cdot(x_2-x_1)$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$$

- druhou nerovnost získáme úpravou nerovnosti

$$f(x_2) \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\cdot(x_2-x_3)+f(x_3) = g(x_2)$$

■

Tvrzení 1: funkce f je konvexní na intervalu (a,b) $\Rightarrow$ funkce f je spojitá na (a,b)

Důkaz:

- ukážeme, že f je spojitá v bodě $x_2 \in (a,b)$
- stačí ukázat, že $\lim_{x\to x_2} f(x) = f(x_2)$, tedy že

$$f(x) \to f(x_2) \quad \text{pro} \quad x \to x_2$$

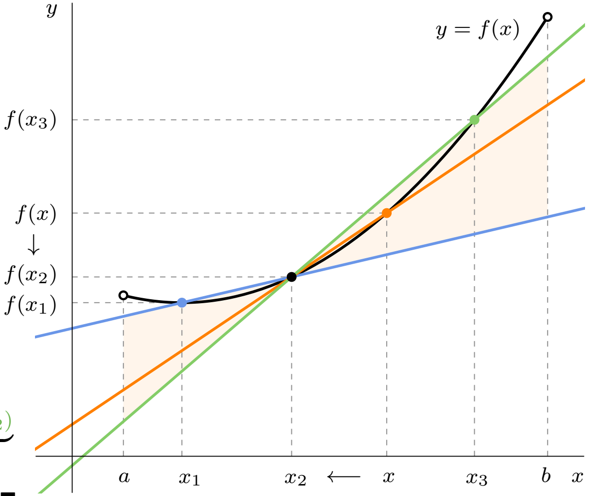
- pro $a < x_1 < x_2 < x < x_3 < b$ máme

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

- bod $(x, f(x))$ leží nad modrou a pod zelenou přímkou

$$\underbrace{S_{1,2}\cdot(x-x_2)+f(x_2)}_{\longrightarrow f(x_2)} \leq f(x) \leq \underbrace{S_{2,3}\cdot(x-x_2)+f(x_2)}_{\longrightarrow f(x_2)}$$

■



Postup rozšiřování n-faktoriálu

- **Definice** konvexity a logaritmické konvexity funkce f na množině M.
- **Tvrzení 1:** funkce f je konvexní na intervalu (a, b) $\implies$ funkce f je spojitá na (a, b).
- **Tvrzení 2 (Youngova nerovnost)**
- **Tvrzení 3:** funkce f je logaritmicky konvexní na M $\implies$ f je konvexní na M.
- **Tvrzení 4:** Funkce $f(n) = n!$ je logaritmicky konvexní na $\mathbb{N}_0$.
- **Tvrzení 5:** Existuje právě jedna funkce $F : (-1, +\infty) \to (0, +\infty)$, pro kterou platí
  1. $F(0) = 1$ a $F(x) = x \cdot F(x - 1)$ pro všechna $x > 0$,
  2. F je logaritmicky konvexní na $(-1, +\infty)$.
- **Poznámka:** Funkce F ve Tvrzení 5 je konvexní na intervalu $(-1, +\infty)$,
  a tedy i spojitá funkce na intervalu $(-1, +\infty)$.

Postup rozšiřování n-faktoriálu

- **Definice** konvexity a logaritmické konvexity funkce f na množině M.
- **Tvrzení 1:** funkce f je konvexní na intervalu (a, b) $\implies$ funkce f je spojitá na (a, b).
- **Tvrzení 2 (Youngova nerovnost)**
- **Tvrzení 3:** funkce f je logaritmicky konvexní na M $\implies$ f je konvexní na M.
- **Tvrzení 4:** Funkce $f(n) = n!$ je logaritmicky konvexní na $\mathbb{N}_0$.
- **Tvrzení 5:** Existuje právě jedna funkce $F : (-1, +\infty) \to (0, +\infty)$, pro kterou platí
  1. $F(0) = 1$ a $F(x) = x \cdot F(x-1)$ pro všechna $x > 0$,
  2. F je logaritmicky konvexní na $(-1, +\infty)$.
- **Poznámka:** Funkce F ve Tvrzení 5 je konvexní na intervalu $(-1, +\infty)$, a tedy i spojitá funkce na intervalu $(-1, +\infty)$.

Youngova nerovnost

Tvrzení 2: Pro každé $a, b \geq 0$ platí $a^\alpha \cdot b^\beta \leq \alpha \cdot a + \beta \cdot b$, kde $\alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle$ a $\alpha + \beta = 1$.

Důkaz:

William Henry Young (1863—1942)

[en.wikipedia.org]

- Youngova nerovnost je triviálně splněna pro

$$a = 0 \text{ nebo } b = 0 \text{ nebo } \alpha = 0 \text{ nebo } \beta = 0$$

Youngova nerovnost

Tvrzení 2: Pro každé $a, b \geq 0$ platí $a^\alpha \cdot b^\beta \leq \alpha \cdot a + \beta \cdot b$, kde $\alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle$ a $\alpha + \beta = 1$.

Důkaz:

- předpokládejme tedy, že $a, b > 0$ a $\alpha, \beta \in (0, 1)$
- označ $A := a^\alpha$ a $B := b^\beta$
- potom Youngova nerovnost má tvar

$$A \cdot B \leq \alpha \cdot A^{\frac{1}{\alpha}} + \beta \cdot B^{\frac{1}{\beta}}$$

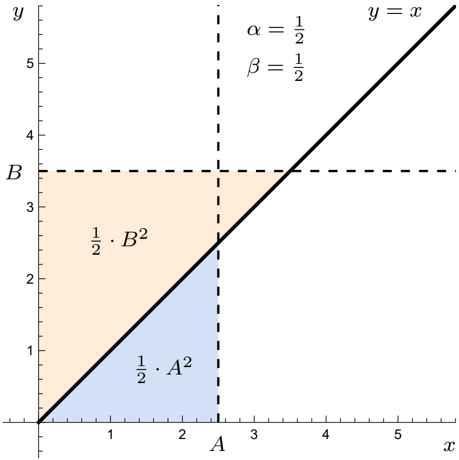
- pro $\alpha = \frac{1}{2}$ máme $\beta = \frac{1}{2}$ a Youngova nerovnost má tvar

$$A \cdot B \leq \tfrac{1}{2} \cdot A^2 + \tfrac{1}{2} \cdot B^2$$

$$2AB \leq A^2 + B^2$$

$$0 \leq A^2 - 2AB + A^2$$

$$0 \leq (A - B)^2$$



Youngova nerovnost

Tvrzení 2: Pro každé $a, b \geq 0$ platí $a^\alpha \cdot b^\beta \leq \alpha \cdot a + \beta \cdot b,$ kde $\alpha, \beta \in \langle 0, 1\rangle$ a $\alpha + \beta = 1.$

Důkaz:

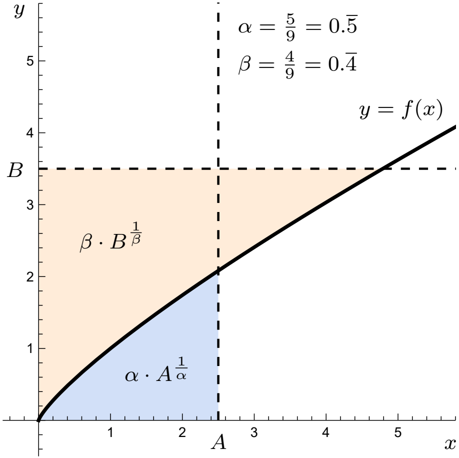
- předpokládejme tedy, že $a, b > 0$ a $\alpha, \beta \in (0, 1)$
- označ $A := a^\alpha$ a $B := b^\beta$
- potom Youngova nerovnost má tvar

$$A \cdot B \leq \alpha \cdot A^{\frac{1}{\alpha}} + \beta \cdot B^{\frac{1}{\beta}}$$

- $\alpha \cdot A^{\frac{1}{\alpha}}$ je obsah plochy pod grafem funkce

$$f(x) := x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} = x^{\frac{\beta}{1-\beta}}$$

- $\beta \cdot B^{\frac{1}{\beta}}$ je obsah plochy nad grafem funkce f



Youngova nerovnost

Tvrzení 2: Pro každé $a, b \geq 0$ platí $a^\alpha \cdot b^\beta \leq \alpha \cdot a + \beta \cdot b$, kde $\alpha, \beta \in \langle 0, 1\rangle$ a $\alpha + \beta = 1$.

Důkaz:

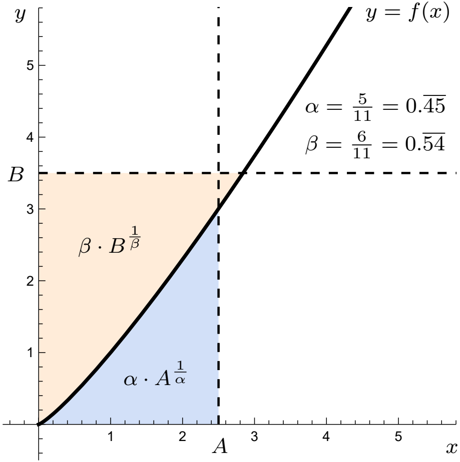
- předpokládejme tedy, že $a, b > 0$ a $\alpha, \beta \in (0, 1)$
- označ $A := a^\alpha$ a $B := b^\beta$
- potom Youngova nerovnost má tvar

$$A \cdot B \leq \alpha \cdot A^{\frac{1}{\alpha}} + \beta \cdot B^{\frac{1}{\beta}}$$

- $\alpha \cdot A^{\frac{1}{\alpha}}$ je obsah plochy pod grafem funkce

$$f(x) := x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} = x^{\frac{\beta}{1-\beta}}$$

- $\beta \cdot B^{\frac{1}{\beta}}$ je obsah plochy nad grafem funkce f



Youngova nerovnost

Tvrzení 2: Pro každé $a, b \geq 0$ platí $a^\alpha \cdot b^\beta \leq \alpha \cdot a + \beta \cdot b$, kde $\alpha, \beta \in \langle 0, 1\rangle$ a $\alpha + \beta = 1$.

Důkaz:

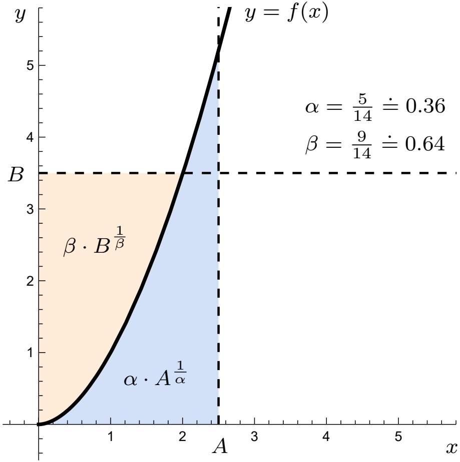
- předpokládejme tedy, že $a, b > 0$ a $\alpha, \beta \in (0, 1)$
- označ $A := a^\alpha$ a $B := b^\beta$
- potom Youngova nerovnost má tvar

$$A \cdot B \leq \alpha \cdot A^{\frac{1}{\alpha}} + \beta \cdot B^{\frac{1}{\beta}}$$

- $\alpha \cdot A^{\frac{1}{\alpha}}$ je obsah plochy pod grafem funkce

$$f(x) := x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} = x^{\frac{\beta}{1-\beta}}$$

- $\beta \cdot B^{\frac{1}{\beta}}$ je obsah plochy nad grafem funkce f



Youngova nerovnost

Tvrzení 2: Pro každé $a, b \geq 0$ platí $a^\alpha \cdot b^\beta \leq \alpha \cdot a + \beta \cdot b,$ kde $\alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle$ a $\alpha + \beta = 1$.

Důkaz:

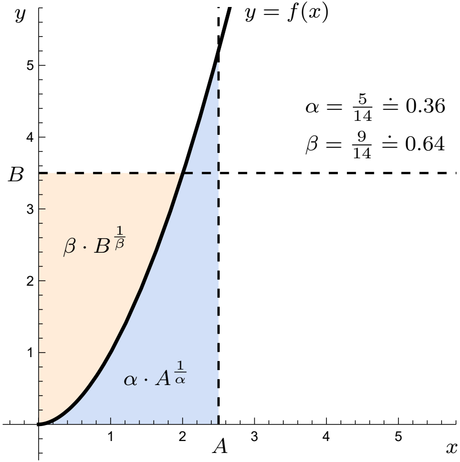
- předpokládejme tedy, že $a, b > 0$ a $\alpha, \beta \in (0, 1)$
- pomocí logaritmické funkce $y = \ln x$ dostaneme

$$\ln\left(a^\alpha \cdot b^\beta\right) \leq \ln\left(\alpha \cdot a + \beta \cdot b\right)$$
$$\ln a^\alpha + \ln b^\beta \leq \ln\left(\alpha \cdot a + \beta \cdot b\right)$$
$$\alpha \cdot \ln a + \beta \cdot \ln b \leq \ln\left(\alpha \cdot a + \beta \cdot b\right)$$
$$\alpha \cdot \ln a + (1-\alpha) \cdot \ln b \leq \ln\left(\alpha \cdot a + (1-\alpha) \cdot b\right)$$

- dále pro $a \neq b$ a $c := \alpha \cdot a + (1-\alpha) \cdot b$ tak máme

$$\frac{b-c}{b-a} \cdot \ln a + \frac{c-a}{b-a} \cdot \ln b \leq \ln c$$

což platí díky konkávitě funkce $y = \ln x$ ■



Tvrzení 3: funkce f je logaritmicky konvexní na M $\Rightarrow$ f je konvexní na M

Důkaz:

- Předpokládáme, že funkce $g(x) := \ln f(x)$ je konvexní na M. Tedy pro libovolné $x_1, x_2, x_3 \in M$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$ máme

$$g(x_2) \leq \underbrace{\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}}_{=:\,\alpha} \cdot g(x_1) + \underbrace{\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}}_{=:\,\beta} \cdot g(x_3)$$

- Chceme ukázat, že $f(x_2) \leq \alpha \cdot f(x_1) + \beta \cdot f(x_3)$:

$$\begin{aligned} f(x_2) = \mathrm{e}^{\ln f(x_2)} = \mathrm{e}^{g(x_2)} &\leq \mathrm{e}^{\alpha \cdot g(x_1) + \beta \cdot g(x_3)} \\ &= \mathrm{e}^{\alpha \cdot g(x_1)} \cdot \mathrm{e}^{\beta \cdot g(x_3)} \\ &= \mathrm{e}^{\alpha \cdot \ln f(x_1)} \cdot \mathrm{e}^{\beta \cdot \ln f(x_3)} \\ &= \big(f(x_1)\big)^{\alpha} \cdot \big(f(x_3)\big)^{\beta} \leq \alpha \cdot f(x_1) + \beta \cdot f(x_3) \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Postup rozšiřování n-faktoriálu

- **Definice** konvexity a logaritmické konvexity funkce f na množině M.
- **Tvrzení 1:** funkce f je konvexní na intervalu (a, b) $\implies$ funkce f je spojitá na (a, b).
- **Tvrzení 2 (Youngova nerovnost)**
- **Tvrzení 3:** funkce f je logaritmicky konvexní na M $\implies$ f je konvexní na M.
- **Tvrzení 4:** Funkce $f(n) = n!$ je logaritmicky konvexní na $\mathbb{N}_0$.
- **Tvrzení 5:** Existuje právě jedna funkce $F : (-1, +\infty) \to (0, +\infty)$, pro kterou platí
  1. $F(0) = 1$ a $F(x) = x \cdot F(x-1)$ pro všechna $x > 0$,
  2. F je logaritmicky konvexní na $(-1, +\infty)$.
- **Poznámka:** Funkce F ve Tvrzení 5 je konvexní na intervalu $(-1, +\infty)$, a tedy i spojitá funkce na intervalu $(-1, +\infty)$.

Postup rozšiřování n-faktoriálu

- **Definice** konvexity a logaritmické konvexity funkce f na množině M.
- **Tvrzení 1:** funkce f je konvexní na intervalu (a, b) $\implies$ funkce f je spojitá na (a, b).
- **Tvrzení 2 (Youngova nerovnost)**
- **Tvrzení 3:** funkce f je logaritmicky konvexní na M $\implies$ f je konvexní na M.
- **Tvrzení 4:** Funkce $f(n) = n!$ je logaritmicky konvexní na $\mathbb{N}_0$.
- **Tvrzení 5:** Existuje právě jedna funkce $F : (-1, +\infty) \to (0, +\infty)$, pro kterou platí
  1. $F(0) = 1$ a $F(x) = x \cdot F(x - 1)$ pro všechna $x > 0$,
  2. F je logaritmicky konvexní na $(-1, +\infty)$.
- **Poznámka:** Funkce F ve Tvrzení 5 je konvexní na intervalu $(-1, +\infty)$, a tedy i spojitá funkce na intervalu $(-1, +\infty)$.

Tvrzení 4: Funkce $f(n) = n!$ je logaritmicky konvexní na $\mathbb{N}_0$.

Důkaz: Ukážeme, že funkce $g(n) := \ln(n!)$, $n \in \mathbb{N}_0$, je konvexní. Pro libovolné $i, j, k \in \mathbb{N}_0$, kde $i < j < k$, chceme ukázat

$$g(j) \leq \frac{k-j}{k-i} \cdot g(i) + \frac{j-i}{k-i} \cdot g(k)$$

$$\ln(j!) \leq \frac{k-j}{k-i} \cdot \ln(i!) + \frac{j-i}{k-i} \cdot \ln(k!)$$

$$(k-i) \cdot \ln(j!) \leq (k-j) \cdot \ln(i!) + (j-i) \cdot \ln(k!)$$

$$0 \leq (k-j) \cdot \ln(i!) - (k-i) \cdot \ln(j!) + (j-i) \cdot \ln(k!)$$

$$0 \leq i \cdot \big(\ln(j!) - \ln(k!)\big) + j \cdot \big(\ln(k!) - \ln(i!)\big) + k \cdot \big(\ln(i!) - \ln(j!)\big)$$

$$0 \leq i \cdot \ln \frac{j!}{k!} + j \cdot \ln \frac{k!}{i!} + k \cdot \ln \frac{i!}{j!}$$

$$-i \cdot \ln \frac{j!}{k!} - k \cdot \ln \frac{i!}{j!} \leq j \cdot \ln \frac{k!}{i!}$$

$$\ln \left(\frac{k!}{j!}\right)^i + \ln \left(\frac{j!}{i!}\right)^k \leq \ln \left(\frac{k!}{i!}\right)^j$$

Tvrzení 4: Funkce $f(n) = n!$ je logaritmicky konvexní na $\mathbb{N}_0$.

Důkaz: Ukážeme, že funkce $g(n) := \ln(n!)$, $n \in \mathbb{N}_0$, je konvexní. Pro libovolné $i, j, k \in \mathbb{N}_0$, kde $i < j < k$, chceme ukázat

$$\ln\left(\frac{k!}{j!}\right)^i + \ln\left(\frac{j!}{i!}\right)^k \leq \ln\left(\frac{k!}{i!}\right)^j$$

$$\ln\left(\left(\frac{k!}{j!}\right)^i \cdot \left(\frac{j!}{i!}\right)^k\right) \leq \ln\left(\frac{k!}{i!}\right)^j$$

$$\left(\frac{k!}{j!}\right)^i \cdot \left(\frac{j!}{i!}\right)^k \leq \left(\frac{k!}{i!}\right)^j$$

$$\big((j+1)\cdots k\big)^i \cdot \big((i+1)\cdots j\big)^k \leq \big((i+1)\cdots k\big)^j$$

$$\big((j+1)\cdots k\big)^i \cdot \big((i+1)\cdots j\big)^k \leq \big((i+1)\cdots j\big)^j \cdot \big((j+1)\cdots k\big)^j$$

$$\Big(\underbrace{(i+1)\cdots j}_{(j-i)\text{ činitelů}}\Big)^{k-j} \leq \Big(\underbrace{(j+1)\cdots k}_{(k-j)\text{ činitelů}}\Big)^{j-i}$$

$$\big((i+1)\cdots j\big)^{k-j} \leq \left(j^{j-i}\right)^{k-j} \leq \left((j+1)^{k-j}\right)^{j-i} \leq \big((j+1)\cdots k\big)^{j-i}$$

$$j^{k-i} \leq (j+1)^{k-i}$$

$$j \leq j+1 \qquad \blacksquare$$

Postup rozšiřování n-faktoriálu

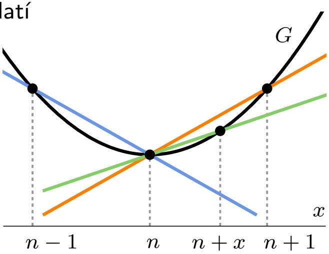
- **Definice** konvexity a logaritmické konvexity funkce f na množině M.
- **Tvrzení 1:** funkce f je konvexní na intervalu $(a, b) \implies$ funkce f je spojitá na (a, b).
- **Tvrzení 2 (Youngova nerovnost)**
- **Tvrzení 3:** funkce f je logaritmicky konvexní na $M \implies f$ je konvexní na M.
- **Tvrzení 4:** Funkce $f(n) = n!$ je logaritmicky konvexní na $\mathbb{N}_0$.
- **Tvrzení 5:** Existuje právě jedna funkce $F : (-1, +\infty) \to (0, +\infty)$, pro kterou platí
  1. $F(0) = 1$ a $F(x) = x \cdot F(x-1)$ pro všechna $x > 0$,
  2. F je logaritmicky konvexní na $(-1, +\infty)$.
- **Poznámka:** Funkce F ve Tvrzení 5 je konvexní na intervalu $(-1, +\infty)$, a tedy i spojitá funkce na intervalu $(-1, +\infty)$.

Postup rozšiřování n-faktoriálu

- **Definice** konvexity a logaritmické konvexity funkce f na množině M.
- **Tvrzení 1:** funkce f je konvexní na intervalu (a, b) $\implies$ funkce f je spojitá na (a, b).
- **Tvrzení 2 (Youngova nerovnost)**
- **Tvrzení 3:** funkce f je logaritmicky konvexní na M $\implies$ f je konvexní na M.
- **Tvrzení 4:** Funkce $f(n) = n!$ je logaritmicky konvexní na $\mathbb{N}_0$.
- **Tvrzení 5:** Existuje právě jedna funkce $F : (-1, +\infty) \to (0, +\infty)$, pro kterou platí
  1. $F(0) = 1$ a $F(x) = x \cdot F(x-1)$ pro všechna $x > 0$,
  2. F je logaritmicky konvexní na $(-1, +\infty)$.
- **Poznámka:** Funkce F ve Tvrzení 5 je konvexní na intervalu $(-1, +\infty)$, a tedy i spojitá funkce na intervalu $(-1, +\infty)$.

Tvrzení 5: Existuje právě jedna funkce $F : (-1, +\infty) \to (0, +\infty)$, pro kterou platí

1. $F(0) = 1$ a $F(x) = x \cdot F(x-1)$ pro všechna $x > 0$,
2. F je logaritmicky konvexní na $(-1, +\infty)$.

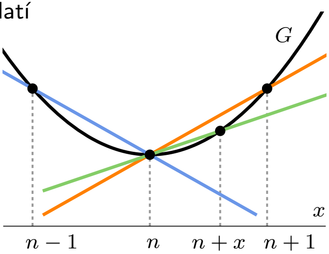


Důkaz:

- označme $G(x) := \ln F(x)$ a máme
  - $G(0) = 0$ a $G(x) = \ln x + G(x-1)$ pro $x > 0$
  - G je konvexní na $(-1, +\infty)$
- stačí ukázat jednoznačnost G na intervalu $(0, 1)$
- zvolme $x \in (0, 1)$, potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme
$$\underbrace{\frac{G(n) - G(n-1)}{1}}_{= \ln n} \leq \frac{G(n+x) - G(n)}{x} \leq \underbrace{\frac{G(n+1) - G(n)}{1}}_{= \ln(n+1)}$$
- dále upravme
$$\begin{aligned} G(x+n) &= \ln(x+n) + G(x+n-1) \\ &= \ln(x+n) + \ln(x+n-1) + G(x+n-2) \\ &= \ln(x+n) + \ln(x+n-1) + \ln(x+n-2) + \cdots + \ln(x+1) + G(x) \\ &= \ln\left((x+n)\cdot(x+n-1)\cdot(x+n-2)\cdots(x+1)\right) + G(x) \end{aligned}$$
- a tedy $G(n) = \ln\left(n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1\right) + G(0) = \ln n!$
- celkem máme $\ln n \leq \dfrac{G(x) + \ln\left((x+n)\cdots(x+1)\right) - \ln n!}{x} \leq \ln(n+1)$

Tvrzení 5: Existuje právě jedna funkce $F : (-1, +\infty) \to (0, +\infty)$, pro kterou platí

1. $F(0) = 1$ a $F(x) = x \cdot F(x-1)$ pro všechna $x > 0$,
2. F je logaritmicky konvexní na $(-1, +\infty)$.



Důkaz:

- označme $G(x) := \ln F(x)$ a máme
  - $G(0) = 0$ a $G(x) = \ln x + G(x-1)$ pro $x > 0$
  - G je konvexní na $(-1, +\infty)$
- zatím máme

$$\begin{array}{rcccl}
\ln n & \leq & \dfrac{G(x) + \ln\left((x+n)\cdots(x+1)\right) - \ln n!}{x} & \leq & \ln(n+1) \\
x \ln n & \leq & G(x) + \ln\left((x+n)\cdots(x+1)\right) - \ln n! & \leq & x \ln(n+1) \\
0 & \leq & G(x) + \ln \dfrac{(x+n)\cdots(x+1)}{n!} - x \ln n & \leq & x\ln(n+1) - x \ln n \\
0 & \leq & G(x) - \ln \dfrac{n!}{(x+n)\cdots(x+1)} - \ln n^x & \leq & x \ln \dfrac{n+1}{n} \\
0 & \leq & G(x) - \ln \dfrac{n! \cdot n^x}{(x+n)\cdots(x+1)} & \leq & x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0
\end{array}$$

- a tedy

$$G(x) = \lim_{n \to +\infty} \ln \frac{n! \cdot n^x}{(x+n)\cdots(x+1)}, \qquad F(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! \cdot n^x}{(x+n)\cdots(x+1)}$$

∎

Tvrzení 5: Existuje právě jedna funkce $F : (-1, +\infty) \to (0, +\infty)$, pro kterou platí

1. $F(0) = 1$ a $F(x) = x \cdot F(x-1)$ pro všechna $x > 0$,
2. F je logaritmicky konvexní na $(-1, +\infty)$.

Poznámky:

- z důkazu Tvrzení 5 máme

$$\begin{aligned} F(x) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n! \cdot n^x}{(x+n)\cdots(x+1)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} n^x \cdot \frac{1\cdots(n-1)\cdot n}{(x+1)\cdots(x+n-1)\cdot(x+n)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} n^x \cdot \frac{1}{x+1}\cdots\frac{n-1}{x+n-1}\cdot\frac{n}{x+n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} n^x \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{x+k} \end{aligned}$$

- pro $x > -1$ platí

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{+\infty} t^x \cdot \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (-\ln s)^x\ \mathrm{d}s = \Gamma(x+1) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} F(0.5) &= \lim_{n\to+\infty} n^{0.5} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{0.5+k} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{1}{0.5+1} \cdot \frac{2}{0.5+2} \cdots \frac{n}{0.5+n} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \doteq 0.8862269255 \end{aligned}$$

- pro $n = 1\,000\,000$ máme

$$n^{0.5} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{0.5+k} \doteq 0.8862265931$$

- $$\begin{aligned} F(4.5) &= \lim_{n\to+\infty} n^{4.5} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{4.5+k} \\ &= \frac{945\sqrt{\pi}}{32} \doteq 52.34277778 \end{aligned}$$

Tvrzení 5: Existuje právě jedna funkce $F : (-1, +\infty) \to (0, +\infty)$, pro kterou platí

1. $F(0) = 1$ a $F(x) = x \cdot F(x-1)$ pro všechna $x > 0$,
2. F je logaritmicky konvexní na $(-1, +\infty)$.

Poznámky:

- z důkazu Tvrzení 5 máme

$$F(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! \cdot n^x}{(x+n)\cdots(x+1)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^x \cdot \frac{1\cdots(}{(x+1)\cdots(x}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^x \cdot \frac{1}{x+1} \cdots \frac{n}{x+}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^x \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{x+k}$$

- pro $x > -1$ platí

$$F(x) = \int_0^{+\infty} t^x \cdot \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 (-\ln s)^x \, \mathrm{d}s = \Gamma(x+1)$$

Děkuji za pozornost!

https://home.zcu.cz/~pnecesal/2_718281828459045235360287

pnecesal@kma.zcu.cz

$$n^{0.5} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{0.5+k} \doteq 0.8862265931$$

- $F(4.5) = \lim_{n\to+\infty} n^{4.5} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{4.5+k}$

$$= \frac{945\sqrt{\pi}}{32} \doteq 52.34277778$$