Matematika a obchodování na burze

Jan Pospíšil

Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd,
Západočeská univerzita v Plzni

Semináře nejen k MO

1. března 2024

Na semináři si ukážeme základní principy toho, jak funguje obchodování na burze, vysvětíme si, kdo jsou tvůrci trhu a jaké matematické metody se mohou používat při tvorbě algoritmů pro automatické obchodování. Pomocí nástrojů středoškolské matematiky si odvodíme i jednoduchý model pro oceňování opcí, což jsou jedny ze základních finančních derivátů.

Částečně inspirováno přednáškou ze semináře Matematické problémy nematematiků, v rámci kterého 5.10.2022 vystoupil Vík Kubelka (Qminers): *Obchodování na burze a tvorba trhu*, záznam zde: https://www.youtube.com/watch?v=Ak17_D_cjFg

Směnárna je místo, kde lze nakupovat a prodávat *valuty* nebo *devizy* podle stanovených kurzů. Kromě bankovních přepážek se směnárny soustřeďují do míst se zvýšeným cizineckým turistickým ruchem jako jsou například letiště, velká nádraží, hraniční přechody a historická centra velkých měst apod.

Příklad

Představme si, že chceme odcestovat do ciziny a nakoupit Eura.
Po příjezdu domů pak zbývající Eura vyměnit zpátky na Koruny.
Kde to bude pro nás nejvýhodnější?

`https://www.kurzy.cz/kurzy-men/nejlepsi-kurzy/EUR-euro/`
`https://www.penize.cz/kurzy-men/6596-euro`

Jak funguje obchodování na burze?

Příklad: Kurzy euro komerčních bank ze dne 26.2.2024 (zdroj: penize.cz)

Kurzy euro komerčních bank:

Název instituce	Valuty		Devizy		Kurz k
	Nákup	Prodej	Nákup	Prodej	
Czech Exchange kurzovní lístek	25,1500	25,3500			26. 2. 2024 00:00
Exchange s.r.o. VIP kurzovní lístek	25,1000	25,4000			26. 2. 2024 09:00
Max banka kurzovní lístek	24,7670	25,9330			23. 2. 2024 00:00
ČSOB kurzovní lístek	24,6770	26,0150	24,6770	26,0150	26. 2. 2024 00:00
Česká spořitelna kurzovní lístek	24,4700	26,2500	24,7260	25,9940	26. 2. 2024 00:00
Komerční banka kurzovní lístek	24,4492	26,2753	24,6014	26,1231	26. 2. 2024 07:00
UnicreditBank Czech Republic kurzovní lístek	24,0920	26,6290	24,4730	26,2480	26. 2. 2024 00:00
Raiffeisenbank kurzovní lístek	24,0041	26,6855	24,4603	26,2293	25. 2. 2024 23:00

Jak funguje obchodování na burze?

Co je to burza?

Burzu si můžeme představit jako instituci, která agreguje veškerou nabídku a poptávku. Účastníci na trhu mají k dispozici

- nejlepší kurz, aniž by řešili, kdo je jejich protistrana,
- veškeré obchodování na jednom místě.

Burza je instituce, která organizuje trh s investičními nástroji a je jednou ze základních součástí kapitálového trhu. Prostřednictvím burzy lze nakupovat a prodávat různé investiční nástroje, tzv. instrumenty:

- akcie, dluhopisy, investiční certifikáty,
- komodity: energetické (elektřina, ropa), průmyslové (drahé kovy), agrární (káva, pšenice, kukuřice),
- finanční deriváty (opce, futures, warranty),
- měny (forex = foreign exchange) a kryptoměny.

Burzy akcií (SE = Stock Exchange): 13 největších (tržní kapitalizace větší než 2 biliony USD, 1 bn = 10^{12}, v angl. trilion) na světě (řazeno dle hlavního regionu):

- USA + Kanada: New York SE (XNYS), Nasdaq (XNAS), Toronto SE (XTSE),
- Asie: Shanghai SE (XSHG), Tokio SE (TYO), Shenzhen SE (XSHE), National SE in India (XNSE), Bombay SE (XBOM), Hong Kong SE (XHKG), Saudi SE (XSAU),
- Evropa: Euronext (XAMS, XBRU, XMSM, XLIS, XMIL, XOSL, XPAR), London SE (XLON), German SE (XFRA).

https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_major_stock_exchanges

Derivátové burzy: National SE in India, Chicago Board Options Exchange (CBOE/CFE), CME Group, Intercontinental Exchange, Eurex Exchange,

Komoditní burzy: Chicago Mercantile Exchange (CME), Tokyo Commodity Exchange (TOCOM), London Metal Exchange (LME).

Velká finanční data na Fakultě aplikovaných věd
https://info.zcu.cz/clanek.jsp?id=4967

Více obrázků a videí z Deutsche Börse AG z Frankfurtu/Eschbornu zde:
https://www.deutsche-boerse.com/dbg-en/media/media-database/

Emitenti získávají na burze finanční prostředky pro své podnikání, investoři mají možnost své volné finanční prostředky zhodnotit. Burza má většiou podobu oboustranné aukce, kde o konečné ceně obchodovaného instrumentu rozhoduje stav nabídky a poptávky. Cena takto získaná se nazývá kurz.

Tvůrci trhu (angl. market makers) se snaží zlepšit nakupující i prodávající cenu tak, aby měli jistotu, že protistrana bude obchodovat právě s nimi.

Motivací tvůrce trhu je maximalizace výnosů z rozdílů cen na poptávkové a nabídkové straně (tzv. spread), při jím garantované likviditě. Market maker na sebe bere riziko plynoucí z budoucích pohybů cen.

V dnešní době je většina obchodování tvůrců trhu zprostředkována pomocí sofistikovaných algoritmů (cca od r. 2008).

Kdo jsou účastníci trhu?

Svým způsobem se *malým* tvůrcem trhu stane i drobný investor, který zadá zároveň požadavek (objednávku) na nákup i na prodej.

Přítomnost *velkých* tvůrců trhu má pro účastníky finančních trhů řadu výhod (cit. Kubelka, Qminers):

- Zvyšuje se likvidita na trhu, takže pro účastníky je snazší nakupovat nebo prodávat a můžou se tak přímo soustředit na svůj business,
- Tvůrci trhu pomáhají zmenšovat výkyvy v cenách,
- Tvůrci trhu často zmenšují (zužují) bid-ask spread, přestože jeden z jejich hlavních příjmů je právě spread,
- Tvůrci trhu pomáhají dělat trhy efektivnější.

- Co je to arbitráž?
- A co říká teorie efektivních trhů?

Arbitráž je ve financích *snový* způsob obchodu, který využívá odlišných cen na různých trzích. V zásadě to mohou být místně oddělené trhy (pak se jedná o místní arbitráž), anebo časově oddělené trhy - spotový a termínový (pak se jedná o časovou arbitráž). Setkali jste se někdy s arbitráží třeba u těch směnáren?

Obchodník nákupem identického instrumentu (zboží) na jednom trhu a jeho prodejem na jiném trhu za různé ceny dosahuje bezrizikového zisku. Působením arbitrů se však nakonec ceny na trzích srovnávají. Arbitrážní obchody se přestávají vyplácet, pokud je rozdíl mezi cenami na jednotlivých trzích roven maximálně transakčním nákladům převedení zboží mezi těmito trhy.

Možnosti arbitráže jsou s rostoucí globalizací stále nižší, protože se zvětšujícím se množstvím hráčů na trhu se zvyšuje také jeho likvidita i efektivita.

https://cs.wikipedia.org/wiki/Arbitráž_(finance)

Po matematických modelech budeme téměř vždy chtít, aby byly bezarbitrážní.

Jak efektivní je trh?

Teorie efektivních trhů (anglicky efficient market theory) je jedna z teorií, které se pokoušejí popsat chování kurzů cenných papírů se zaměřením na akcie. Tato teorie předpokládá, že kurzy cenných papírů jsou ovlivňovány pouze objektivními informacemi, očekávanými zisky, dividendami, rizikem a dalšími kurzotvornými informacemi. Tržní cena akcií na trhu pak představuje objektivní hodnotu, akcie jsou v každém okamžiku správně oceněny a na trhu nelze najít podhodnocené nebo nadhodnocené tituly. Z toho vyplývá, že úspěšnost obchodování není možno zvýšit fundamentální či technickou analýzou ani studiem historických údajů, trh reaguje jen na nové informace a je tak zcela nepředvídatelný.

https://cs.wikipedia.org/wiki/Teorie_efektivních_trhů

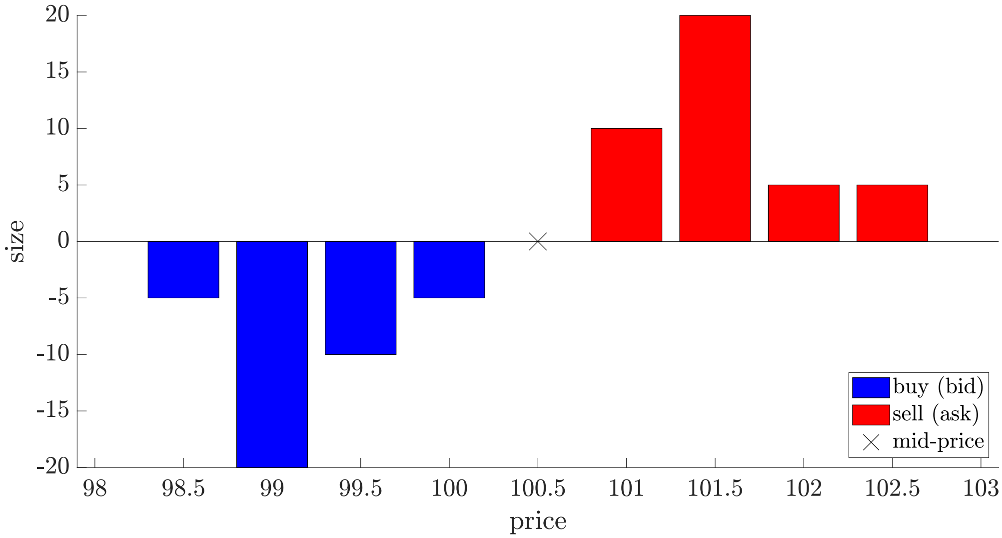
Teorie je to pěkná, ale co realita? Ve vztahu k arbitráži např. platí, že pokud se stejná věc obchoduje na více místech, tak musí být za stejnou cenu (platí tzv. zákon jedné ceny). Pokud bude cena všude stejná, tak trh bude efektivnější - účastník trhu pak nemusí vyhledávat cenu kontraktu na všech burzách.

Gould, M. D., Porter, M. A., Williams, S., McDonald, M., Fenn, D. J., and Howison, S. D. (2013), *Limit order books*. Quant. Finance 13(11), 1709–1742, ISSN 1469-7688, 1469-7696/e, DOI 10.1080/14697688.2013.803148, Zbl 1284.91584, MR3175940

Kůsová, M. (2023), Modelling and prediction of data in limit order books. Master's thesis, University of West Bohemia

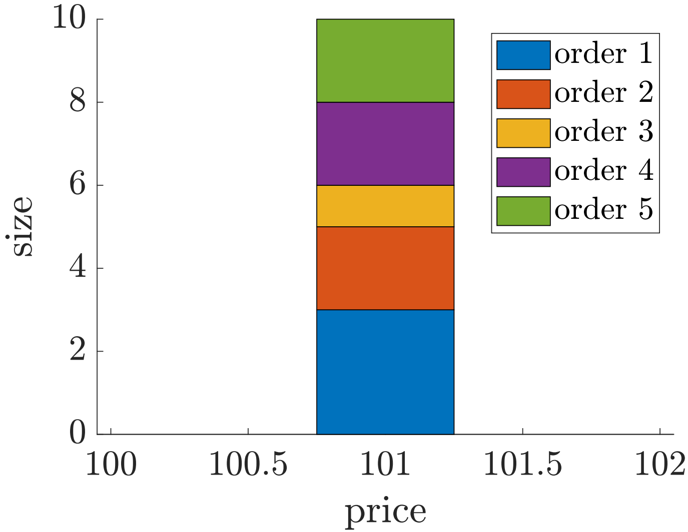
Jak funguje obchodování na burze?

Kniha objednávek



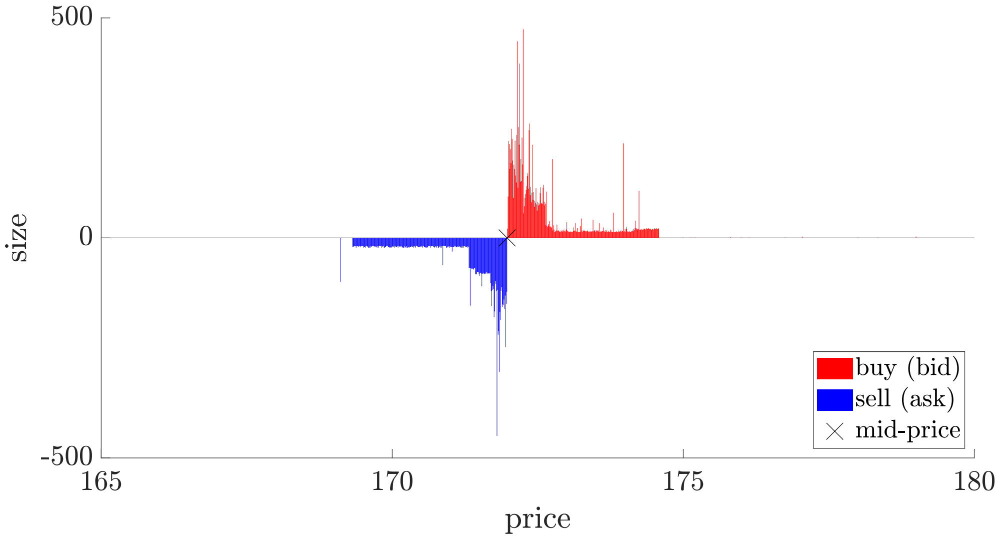
Jak funguje obchodování na burze?

Kniha objednávek - detail



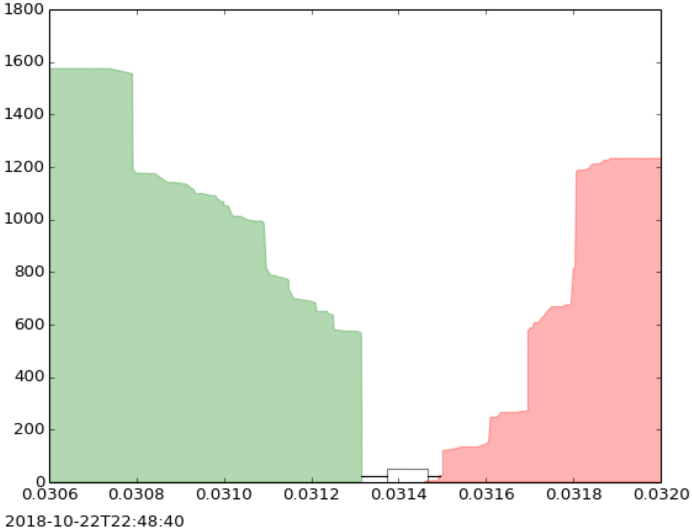
Jak funguje obchodování na burze?

Kniha objednávek - celá kniha v jeden časový okamžik



Jak funguje obchodování na burze?

Kniha objednávek - dynamický vývoj během ca 10h (ETH/BTC)



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Order_book_depth_chart.gif

Jak funguje obchodování na burze?

Kniha objednávek - základní pojmy

- BID (nabídka): cena (resp. největší cena), za kterou je ochotný někdo nakupovat (BUY),
- ASK (poptávka): cena (resp. nejnižší cena), za kterou je ochotný někdo prodávat (SELL),
- MID: cena vypočtená jako aritmetický průměr BID a ASK ceny z TOP OF BOOK,
- BID ASK SPREAD: rozdíl mezi bidem a askem,
- QTY: quantity, množství uvedené na dané objednávce,
- LOT SIZE: standardizované množství aktiva, se kterým se obchoduje, bývá to i nejmenší obchodovatelné množství, často se obchoduje pouze v celočíselných násobcích LOTu,
- TICK SIZE: minimální pohyb ceny aktiva na burze,
- MARKET ORDER: tržní pokyn k okamžitému nákupu nebo prodeji za aktuální (nabízenou) cenu, tj. objednávka je ihned napárovaná (matched & executed),
- LIMIT ORDER: limitní pokyn k nákupu nebo prodeji pouze za cenu stanovenou investorem (nebo lepší), tj. objednávka se zapíše do knihy objednávek, proto se často hovoří pouze o LIMIT ORDER BOOK (LOB).

Jak funguje obchodování na burze?

Párování objednávek

Některé obchodní platformy umožňují obchodníkům podat tržní pokyn k nákupu nebo prodeji, aniž by výslovně uvedli cenu. Místo toho takový obchodník zadá pouze velikost a párovací algoritmus vhodně nastaví cenu příkazu, aby zahájil požadované párování.

Existuje více možností, jak může burza spárovat kupujícího a prodávajícího:

- priorita času FIFO (first in first out), celá objednávka je zobchodovaná s jedním účastníkem (resp. postupně se všemi ve frontě), důležité je tedy pořadí ve frontě určené časem příchodu objednávky do systému,
- priorita Pro-Rata znamená dělení podle velikosti objednávky, přestože je někdo první ve frontě, může dostat méně než např. druhý, který nabízí větší množství,
- priorita množství, kdo chce nakoupit nebo prodat nejvíc je spárován přednostně.

Ve skutečnosti je celý proces párování mnohem komplikovanější, ale v každém případě vždy deterministický, předem jasně definovaný. Více viz např.

Gould, M. D., Porter, M. A., Williams, S., McDonald, M., Fenn, D. J., and Howison, S. D. (2013), *Limit order books*. Quant. Finance 13(11), 1709–1742, ISSN 1469-7688, 1469-7696/e, DOI 10.1080/14697688.2013.803148, Zbl 1284.91584, MR3175940

Matematika v algoritmickém obchodování

V drtivé většině případů je v dnešní době obchodování prováděno zcela pomocí algoritmů. Tyto algoritmy jsou tvořeny velkým množstvím sofistikovaných částí, které využívají různé matematické nástroje a metody. Vhodnost konkrétních nástrojů může být velmi diskutabilní, a tak tyto algoritmy jsou často považovány za neveřejné know-how jednotlivých účastníků trhu.

Protože finanční prostředí je extrémně kompetitivní a peněžní zisk jednoho většinou znamená ztrátu druhého, tak je toto know-how velmi pečlivě střeženo. Velký pozor ja ale potřeba dávat i u veřejně dostupných algoritmů.

Jedna z částí, co obchodní algoritmus může řešit, je odhad budoucí ceny kontraktu, resp. podkladového aktiva. Budoucnost může být cokoliv od teď až do expirace kontraktu. Určitou výhodou může být fakt, že není pevně dáno, jaké metody se pro predikci musí používat, ale každý účastník na trhu může použít celou řadu metod:

- Časové řady,
- Stochastická analýza,
- Strojové (hluboké) učení.

Samozřejmě platí, že čím lepší predikce, tím větší konkurenční výhodu daný účastník trhu má.

Matematika v algoritmickém obchodování

Velikost kotací

Máme-li predikci ceny, tak můžeme algoritmus nechat rozhodovat o tom, kolik chceme nakupovat nebo prodávat, což vede na optimalizační úlohy (např. stochastické programování, celočíselné programování, stochastické řízení, ...). V našem rozhodování by mělo hrát roli:

- Jak burza páruje objednávky? Je optimální, aby se algoritmus choval stejně na FIFO trhu a na Pro-Rata trhu?
- Jak chceme zacházet s rizikem (manage risk) spojené se špatnou predikcí?
- Chceme nějak (dynamicky) upravovat naše chování na základě našich pozic? Tvůrci trhu typicky cílí na tzv. delta neutrální portfolio (též delta hedging), což znamená, že portfolio není citlivé na změnu ceny podkladového aktiva.

Důležité je mít robustní metodologii pro tvorbu nových modelů. Ani to ale nemusí stačit, protože

- Vyšší konkurence si dříve nebo později všimne dané příležitosti a snaží se na ní také vydělat, příležitost tak postupně mizí z trhu,
- Konkurence si všimne, že v určitých okamžicích začíná prodělávat a upraví své chování na trhu (aniž by např. porozuměla tomu, proč prodělává).

Při návrhu algoritmů a při jejich testování hraje svojí roli nepochybně numerická analýza, citlivostní analýza, analýza robustnosti apod.

Vyhledávání arbitrážních příležitostí je nepochybně jedna z nejčastější činností, se kterou lidé tvořící obchodní algoritmy začínají, a testy na arbitráž běží v podstatě neustále (zejména pokud takový test nepřináší žádné dodatečné provozní náklady). A jak již bylo řečeno, je potřeba umět vyhledávat a rozhodovat se velmi rychle, tj. využívají se zde např. sofistikované metody diskrétní optimalizace apod.

Motivace a trochu historie

Harry Max Markowitz (1927-2023)

1952 *Portfolio Selection*, The Journal of Finance 7 (1): 77–91.

1952 *The Utility of Wealth* (Užitek z bohatství), The Journal of Political Economy (Cowles Foundation Paper 57) LX (2): 151–158.

1955 *Portfolio Selection*, Ph.D. thesis at the University of Chicago.

1959 *Efficient Diversification of Investments*, New York: John Wiley & Sons.

Vytvořil mikroteorii správy portfolia pro individuální držitele majetku.

Baruch College, City University of New York,
Rady School of Management, University of California at San Diego

Motivace a trochu historie

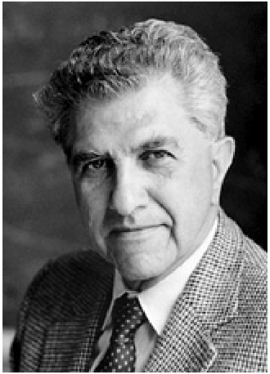
Merton Howard Miller (1923-2000)

1958 *The Cost of Capital, Corporate Finance and the Theory of Investment*

1972 *The Theory of Finance*, New York: Holt, Rinehart & Winston.

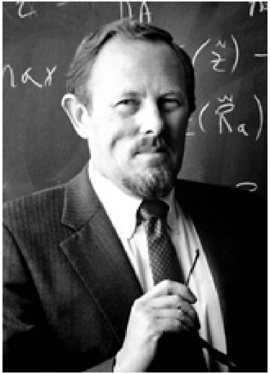
První s “bezarbitrážním” argumentem (žádné stroje na peníze bez rizika).

Harward University,
Johns Hopkins University



Motivace a trochu historie

William Forsyth Sharpe (*1934)



1963 *A Simplified Model for Portfolio Analysis*, Management Science 9 (2): 277–93.

1964 *Capital Asset Prices - A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk*, Journal of Finance XIX (3): 425–42.

Binomický model pro oceňování opcí.

Stanford University,
University of California, Berkeley,
UCLA

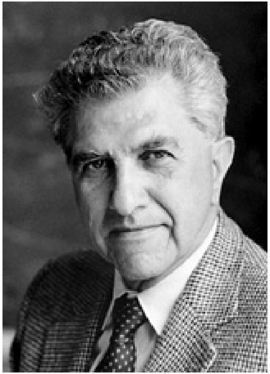
Motivace a trochu historie

Cena za rozvoj ekonomické vědy na památku Alfreda Nobela

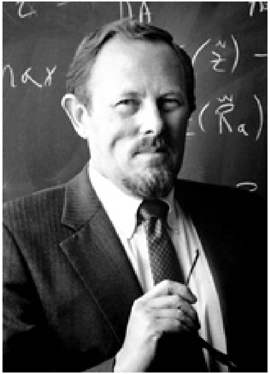
1990 Nobelova cena za ekonomii:

za průkopnickou práci v oblasti teorie finanční ekonomie

Harry M. Markowitz



Merton H. Miller



William F. Sharp

Motivace a trochu historie

Robert Carhart Merton (*1944)

1969 Merton's portfolio problem (spotřeba vs. investice)

1971 Merton's model for pricing European options (equity = option in firm's asset)

1971 *Theory of rational option pricing*,

1973 ICAPM *Intertemporal Capital Asset Pricing Model*

První, kdo používá spojité časové pravděpodobnosti selhání k modelování opcí na kmenové akcie společnosti, tj. používá stochastický kalkulus ve financích.

Columbia University
California Institute of Technology
Massachusetts Institute of Technology

MERTON, R. C. (1973), *Theory of rational option pricing*. Bell J. Econ. 4(1), 141–183, ISSN 0005-8556, DOI 10.2307/3003143, Zbl 1257.91043, MR0496534

Motivace a trochu historie

Myron Samuel Scholes (*1941)

1973 The pricing options and corporate liabilities,

Scholes a Fischer Sheffey Black (1938-1995) společně odvodili známou Black-Scholesovu formuli, která slouží k určení férové ceny Evropské (call) opce (což je právo koupit jednu akcii za stanovenou cenu v určeném čase v budoucnu).

Stanford University

Black, F. and Scholes, M. (1973), *The pricing of options and corporate liabilities*. J. Polit. Econ. 81(3), 637–654, ISSN 0022-3808, DOI 10.1086/260062, Zbl 1092.91524, MR3363443

Motivace a trochu historie

Cena za rozvoj ekonomické vědy na památku Alfreda Nobela

1997 Nobelova cena za ekonomii:

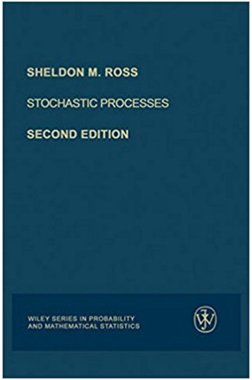
za novou metodu určování hodnoty derivátů

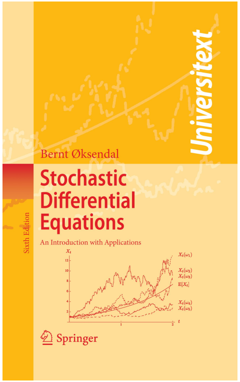
Robert C. Merton

Myron S. Scholes

Základní učebnice

Stochastic Processes, Stochastic Differential Equations



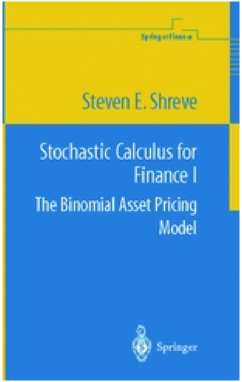


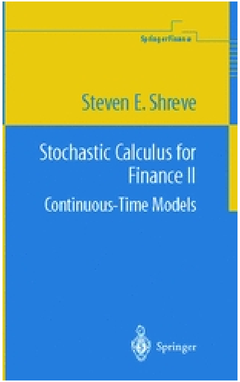
Sheldon M. Ross. *Stochastic Processes*, 2nd ed., Wiley, New York, 1996.

Bernt Øksendal. *Stochastic differential equations: An introduction with applications*, 6th ed., Springer, Berlin, 2003.

Základní učebnice

Stochastic Calculus for Finance I and II





STEVEN E. SHREVE. *Stochastic Calculus for Finance I, The Binomial Asset Pricing Model*, Springer, New York, 2004.

STEVEN E. SHREVE. *Stochastic Calculus for Finance II, Continuous-Time Models*, Springer, New York, 2004.

V čase t_0: počáteční cena akcie je $S_0 > 0$.
Hodíme si mincí: padne buď panna (head) (H) nebo orel (tail) (T).
V čase t_1: cena akcie bude buď $S_1(H)$ nebo $S_1(T)$.
Označme $u = \dfrac{S_1(H)}{S_0}$ tzv. up-factor a $d = \dfrac{S_1(T)}{S_0}$ tzv. down-factor.
Předpokládejme $d < u$ (když $d > u$, tak přeznačíme; když $d = u$ tak S_1 není náhodná), často $d = 1/u$.

$$
\begin{tikzcd}
 & S_1(H) = uS_0 \\
S_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & S_1(T) = dS_0
\end{tikzcd}
$$

Nechť r je úroková sazba na peněžním trhu (angl. money market). Předpokládejme, že $r \geq 0$ a že sazba je stejná pro

$$\begin{aligned} \text{investování} &: 1 \text{ EUR v čase } t_0 \longrightarrow (1+r) \text{ EUR v čase } t_1, \\ \text{půjčování} &: 1 \text{ EUR v čase } t_0 \longrightarrow \text{dluh } (1+r) \text{ EUR v čase } t_1. \end{aligned}$$

Arbitráž = obchodní strategie, která začíná *bez peněz*, má nulovou pravděpodobnost ztráty peněz a má kladnou pravděpodobnost výdělku.

Lemma

Model je bezarbitrážní právě tehdy, když $0 < d < 1 + r < u$.

Evropská kupní opce (angl. call option) = právo (ale ne povinnost) koupit jednu akcii v čase jedna za realizační cenu (strike price) K.
Předpokládejme: $S_1(T) < K < S_1(H)$.

$$T \Rightarrow \text{opce vyprší (expires) bezcenná,}$$
$$H \Rightarrow \text{opci je možné uplatnit (exercise), přináší zisk} S_1(H) - K.$$

Opce v čase jedna má hodnotu $(S_1 - K)^+ = \max\{0, S_1 - K\}$.
Evropská prodejní opce (put option) vyplácí $(K - S_1)^+$.
Obě opce jsou cenné papíry (derivative securities), vyplácí buď $V_1(H)$ nebo $V_1(T)$.

Fundamentální otázka: Jakou má hodnotu v čaase nula?

1. Akcie lze pro nákup i prodej rozdělit na libovolné zlomky (splněno, pokud existuje hodně opcí).
2. Úroková sazba je stejná pro investování i pro půjčování (téměř splněno pro velké instituce).
3. Nákupní cena = prodejní cena, tj. bid-ask spread je nulový (v praxi NENÍ splněno, není triviální).
4. V každém okamžiku může akcie v následujícím období nabýt pouze dvou možných hodnot (binomický model) nebo je cena akcie modelovaná geometrickým Brownovým pohybem (model se spojitým časem), který vede k Black-Scholes-Mertonovu modelu (tento předpoklad empiricky NENÍ splněn).

- V čase t_0: počáteční bohatství X_0, koupíme Δ_0 akcií,
náš stav peněžních prostředků (cash position) je $X_0 - \Delta_0 S_0$,
- V čase t_1:

$$\begin{aligned} X_1 &= \Delta_0 S_1 + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) \\ &= (1+r)X_0 + \Delta_0[S_1 - (1+r)S_0] \end{aligned}$$

- Hledáme X_0 a Δ_0 tak, aby $X_1(H) = V_1(H)$ a $X_1(T) = V_1(T)$:

$$\begin{aligned} V_1(H) &= (1+r)X_0 + \Delta_0[S_1(H) - (1+r)S_0] \\ V_1(T) &= (1+r)X_0 + \Delta_0[S_1(T) - (1+r)S_0]. \end{aligned}$$

- Řešení:

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)}$$ - zajištění delta (tzv. delta hedging formula)

$$X_0 = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_1(H) + \tilde{q}V_1(T)] =: V_0$$ - zajistili jsme si tzv. krátkou (short) pozici,

kde $\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}$ a $\tilde{q} = 1 - \tilde{p} = \frac{u-1-r}{u-d}$ jsou tzv. rizikově neutrální pravděpodobnosti

- V čase t_0: $X_0 = 1.20$, nakoupíme $\Delta_0 = 0.5$ akcií za cenu $\Delta_0 S_0 = 2$, tj. musíme si na to půjčit 0.80, náš stav peněz: $X_0 - \Delta_0 S_0 = -0.80$ (tj. dlužíme),
- V čase t_1: stav peněz: $(1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = -1$ (tj. větší dluh),

naše portfolio bude

$$\begin{aligned} \text{buď } X_1(H) &= \Delta_0 S_1(H) + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = 4 - 1 = 3 \\ \text{nebo } X_1(T) &= \Delta_0 S_1(T) + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

hodnota opce je

$$\begin{aligned} \text{buď } V_1(H) &= (S_1(H) - K)^+ = (8-5)^+ = 3 \\ \text{nebo } V_1(T) &= (S_1(T) - K)^+ = (2-5)^+ = 0. \end{aligned}$$

Obchodováním na akciovém a peněžním trhu jsme tzv. replikovali opci.
Pravděpodobnosti $\tilde{p} = \tilde{q} = 1/2$ a bezarbitrážní cena

$$V_0 = \frac{1}{1+r}[\tilde{p} V_1(H) + \tilde{q} V_1(T)] = \frac{2}{5}[3+0] = \frac{6}{5} = 1.20.$$

Například 3-periodický model:

$$\begin{tikzcd}
 & & & S_3(HHH) \\
 & & S_2(HH) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & S_1(H) \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_3(HHT) = S_3(HTH) = S_3(THH) \\
S_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(HT) = S_2(TH) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & S_1(T) \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_3(HTT) = S_3(THT) = S_3(TTH) \\
 & & S_2(TT) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & & S_3(TTT)
\end{tikzcd}$$

Budeme uvažovat N hodů mincí $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$. Nyní Δ_n může být různé v každém čase t_n.

Věta

Nechť $0 < d < 1 + r < u, \tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}, \tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d}$. *Nechť* V_N *(cenný papír splatný v čase* N*) je náhodná veličina.*

Definujeme rekurentně zpětně v čase pro $n = N-1, N-2, \ldots, 1, 0$ *hodnoty* V_n *a* Δ_n *takto:*

$$V_n = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{n+1}(H) + \tilde{q}V_{n+1}(T)],$$

$$\Delta_n = \frac{V_{n+1}(H) - V_{n+1}(T)}{S_{n+1}(H) - S_{n+1}(T)} = \frac{V_{n+1}(H) - V_{n+1}(T)}{(u-d)S_n}.$$

Definujeme rekurentne dopředně

$$X_0 = V_0,$$

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n).$$

Potom $X_N = V_N$ *pro všechny libovolné hody mincí* $\omega_1, \ldots, \omega_N$.

Shrnutí

Jak funguje obchodování na burze?
- Co je to burza?
- Kdo jsou účastníci trhu?
- Jak efektivní je trh?
- Kniha objednávek

Matematika v algoritmickém obchodování
- Predikce ceny
- Velikost kotací
- Backtesting
- Arbitrážní příležitosti

Finanční deriváty
- Motivace a trochu historie
- Binomický model

Matematické vzdělání je pro práci v oblasti financí zcela zásadní

Co dál?

- Bakalářské studium: Matematika a finanční studia, Matematika a její aplikace
- Středoškolská odborná činnost (SOČ)

Reference I

Black, F. and Scholes, M. (1973), *The pricing of options and corporate liabilities*. J. Polit. Econ. 81(3), 637–654, ISSN 0022-3808, DOI 10.1086/260062, Zbl 1092.91524, MR3363443.

Gould, M. D., Porter, M. A., Williams, S., McDonald, M., Fenn, D. J., and Howison, S. D. (2013), *Limit order books*. Quant. Finance 13(11), 1709–1742, ISSN 1469-7688, 1469-7696/e, DOI 10.1080/14697688.2013.803148, Zbl 1284.91584, MR3175940.

Kůsová, M. (2023), Modelling and prediction of data in limit order books. Master's thesis, University of West Bohemia.

Merton, R. C. (1973), *Theory of rational option pricing*. Bell J. Econ. 4(1), 141–183, ISSN 0005-8556, DOI 10.2307/3003143, Zbl 1257.91043, MR0496534.

Øksendal, B. (2003), Stochastic differential equations. An introduction with applications. Universitext, Berlin: Springer-Verlag, 6th edn., ISBN 3-540-04758-1/pbk, DOI 10.1007/978-3-642-14394-6, Zbl 1025.60026, MR2001996.

Ross, S. M. (1996), Stochastic processes. Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics, John Wiley & Sons, Inc., New York, second edn., ISBN 0-471-12062-6, Zbl 0888.60002, MR1373653.

Shreve, S. E. (2004a), Stochastic calculus for finance I. The binomial asset pricing model. Springer Finance, New York: Springer-Verlag, ISBN 978-0-387-40100-3/hbk; 978-0-387-24968-1/pbk; 978-0-387-22527-2/ebook, DOI 10.1007/978-0-387-22527-2, Zbl 1068.91040, MR2049045.

Reference II

Shreve, S. E. (2004b), Stochastic calculus for finance II. Continuous-time models. Springer Finance, New York: Springer-Verlag, ISBN 978-0-387-40101-0/hbk; 978-1-4419-2311-0/pbk, Zbl 1068.91041, MR2057928.

Děkuji za pozornost!

Jan Pospíšil
honik@kma.zcu.cz