FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY
V PLZNI
KATEDRA MATEMATIKY

G. CARDANO A KUBICKÉ ROVNICE

Hana Levá

Semináře nejen k MO
20. října 2023

Osnova

1. část:

- rovnice a jejich dělení
- lineární a kvadratické rovnice

2. část:

- kubické rovnice
- Gerolamo Cardano a jeho příspěvek k řešení rovnic

Rovnice – zavedení pojmů

- **rovnicí** rozumíme rovnost dvou výrazů

$$L(x) = P(x),$$

  které závisejí na proměnné x, tu pak nazýváme **neznámá**
- **kořen rovnice** je takové x, pro které rovnost platí
- **řešení** je množina kořenů dané rovnice
- 2 případy – rovnice má nebo nemá řešení
- nás budou zajímat $x \in \mathbb{R}$, pro úplnost ale zmíníme i jiné
- nulové řešení někdy nazýváme **triviální**, nenulové pak **netriviální**
- setkat se můžeme i s rovnicemi nebo soustavami rovnic o více neznámých (není předmětem této přednášky)

Dělení rovnic

- rovnice dělíme na:

ALGEBRAICKÉ ROVNICE

a

TRANSCENDENTNÍ ROVNICE

- další například funkcionální, diferenciální nebo integrální rovnice

Algebraické rovnice

- výrazy $L(x)$ a $P(x)$ jsou algebraické, tj. matematické výrazy tvořené konstantami a proměnnými propojenými pomocí algebraických operací jako je sčítání, násobení atd.
- také je nazýváme **polynomické** rovnice
- **polynom** (mnohočlen) je výraz typu

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n,$$

kde $a_n \neq 0$ a $a_0, \ldots, a_n$ jsou koeficienty polynomu

Transcendentní rovnice

- výrazy $L(x)$ a $P(x)$ obsahují funkce, které nejdou vyjádřit jako polynom, například exponenciální, logaritmické nebo goniometrické funkce atd.
- často se stává, že je nelze řešit analyticky
- vhodnými metodami pak hledáme jen přibližné řešení (jeho aproximaci)
- analyticky řešitelné jsou rovnice, kde x vystupuje pouze v argumentu transcendentních funkcí, pak lze použít inverzní operace
- my se transcendentními rovnicemi zabývat nebudeme

Řešení rovnic – ekvivalentní úpravy

- ekvivalentními úpravami myslíme takové úpravy, které převedou původní rovnici na jinou rovnici se stejnými kořeny; nemění tedy platnost rovnice
- ekvivalentní úpravy rovnic:
  1) přičtení výrazu k oběma stranám rovnice
  2) vynásobení obou stran rovnice nenulovým číslem
- pomocí ekvivalentních úprav můžeme převést rovnici do tvaru $F(x) = 0$, kde $F(x) = L(x) - P(x)$

Řešení rovnic – zkouška

- při řešení lze používat i další operace jako umocňování, odmocňování, logaritmování atd. (týká se transcendentních rovnic), takové úpravy ale nejsou ekvivalentní a musíme pak provést **zkoušku**
- zkoušku provedeme, i když si nejsme jistí, zda byly úpravy ekvivalentní
- zkoušku provádíme tak, že kořen x_0 dosadíme do obou stran rovnice, a musí platit $L(x_0) = P(x_0)$

Algebraické rovnice a řešení v radikálech

- algebraickou rovnicí **stupně** n nazveme rovnici

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

kde $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$ a $n \geq 1$

- pokud je možné vyjádřit kořeny algebraické rovnice vzorcem obsahujícím pouze koeficienty a_i a operace sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování, říkáme, že je rovnice řešitelná v **radikálech**

- pro $n \leq 4$ jsou algebraické rovnice v radikálech řešitelné
- pro $n \geq 5$ obecné řešení v závislosti na parametrech rovnice neexistuje; ukázáno bylo až na začátku 19. století
- zvláštními případy jsou rovnice **reciproké**, které mají symetrické koeficienty $a_k = a_{n-k}$ (nebo $a_k = -a_{n-k}$) a rovnice **binomické**, tj. typu $x^n - a_0 = 0$; pro ty řešení dokážeme najít
- my se budeme zabývat pouze $n \in \{1, 2, 3\}$, tedy rovnicemi **lineárními**, **kvadratickými** a **kubickými**

Historické okénko

- úlohy, které vedou na lineární rovnice se v historii objevují poměrně brzy – ve starém Egyptě, Mezopotámii nebo staré Číně
- příklad úlohy z Rhindova papyru (cca 1650 př. n. l., obsahuje 87 úloh a je uložen v Britském muzeu):

  Celá hromada, její dvě třetiny, její polovina a její sedmina dávají dohromady 37 kusů. Kolik kusů je v celé hromadě?

- dnešní symbolikou můžeme tuto úlohu zapsat jako

$$x + \frac{2x}{3} + \frac{x}{2} + \frac{x}{7} = 37$$

- symbolika se začala pořádně rozvíjet až v první polovině 15. století

Lineární rovnice

- máme algebraickou rovnici stupně $n = 1$:

$$a_1 x + a_0 = 0$$

- přeznačíme koeficienty $a := a_1$ a $b := a_0$ a budeme psát

$$ax + b = 0$$

- řešit můžeme výpočtem, tj. ekvivalentními úpravami, nebo graficky
- obecné řešení

$$x = -\frac{b}{a}$$

Historické okénko

- úlohy vedoucí na kvadratické rovnice byly řešeny už ve staré Mezopotámii (18. až 16. století př. n. l.) pomocí úpravy na úplný čtverec
- zdůrazněme, že tehdejší matematici pracovali pouze s kladnými čísly (ani záporné, ani 0)
- první zápis nuly je datován přibližně do 3. až 4. století n. l.; evropští matematici ji začínají používat až ve 12. století n. l. (převzali od Arabů)

al-Chorézmí

- 8. a 9. století n. l.
- perský matematik Muhammad Ibn Músá al-Chórezmí jako první chápal algebru jako samostatnou matematickou disciplínu
- z arabského *al-jabr* pochází dnešní *algebra*
- ve svém díle *Al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala* provedl klasifikaci úloh vedoucích na lineární a kvadratické rovnice
- pracoval pouze s kladnými čísly, proto bylo třeba rozlišit $x^2 + ax = b$, $x^2 = ax + b$ a $x^2 + b = ax$; nedostával tedy ani záporné kořeny
- přešel od geometrie k algebře, řešení popisoval algoritmicky (např.: $x^2 + 10x = 39 \quad \rightsquigarrow \quad x = 3$)

Domnělá podoba Muhammada ibn Músá al-Chórezmího inspirovaná sovětskou poštovní známkou.

Stránka ze spisu *Al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala*.

Autor obrázku vlevo: Michel Bakni, zdroj: wikipedia.org

Kvadratické rovnice

- máme algebraickou rovnici stupně $n = 2$:

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

- přeznačíme koeficienty $a := a_2$, $b := a_1$ a $c := a_0$ a píšeme

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- rozebereme si možnosti, jak řešit
- obecné řešení

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Komplexní čísla

- komplexní čísla zavádíme rozšířením reálných čísel, značíme $\mathbb{C}$
- do matematiky vstoupila v 16. století n. l. právě při řešení algebraických rovnic, ale až v 19. století došlo k jejich plnému uznání a rozšíření
- **Základní věta algebry**: Každý (nekonstantní) polynom s komplexními koeficienty (tj. $a_i \in \mathbb{C}$) má alespoň jeden komplexní kořen.
- důsledkem je, že každá algebraická rovnice s komplexními koeficienty stupně $n \geq 1$ má právě n komplexních kořenů, pokud počítáme každý násobný kořen tolikrát, kolik je jeho násobnost.

- zavedeme **imaginární jednotku** $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, tedy $\mathrm{i}^2 = -1$
- komplexní čísla píšeme ve tvaru $z = x + \mathrm{i}y$, kde $x, y \in \mathbb{R}$
- x značí reálnou složku čísla z, tj. $x = \operatorname{Re} z$, y značí imaginární složku čísla z, tj. $y = \operatorname{Im} z$
- dají se interpretovat geometricky (Gaussova rovina)
- základní operace sčítání a násobení:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

- **komplexně sdružené** číslo $\overline{z}$ k číslu z je číslo ve tvaru $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$

Viètovy vzorce

- mějme kvadratickou rovnici ve vynormovaném tvaru (tj. $a = 1$):
$$x^2 + px + q = 0$$
- levou stranu můžeme rozložit na součin $(x - x_1)(x - x_2)$, kde x_1 a x_2 jsou (komplexní) kořeny dané rovnice
- platí
$$x_1 + x_2 = -p$$
$$x_1 \cdot x_2 = q$$

François Viète ($*1540$ – $\dagger 1603$)

- byl to francouzský matematik, advokát a politik
- získal bakalářský titul z práv, matematika byla jeho koníček a věnoval se jí jen ve volných chvílích
- byl poradcem na dvoře francouzského krále
- luštil šifry a za jeho nejslavnější počin se považuje rozluštění tajného španělského kódu, který byl využíván ve válce Francie proti Španělsku
- Španělé protestovali u papeže, že se jedná o černou magii
- také ukázal výpočet čísla π pomocí nekonečného součinu

Zdroj: wikipedia.org

- v roce 1591 vydal knihu *In artem analyticam isagoge*, kde poprvé zavedl koeficienty v rovnici jako písmena označující čísla
- jeho práce byly psány velmi těžkým a složitým jazykem, proto dlouho nevešly ve známost
- byly uspořádány až po jeho smrti a vydány roku 1646

- F. Viète se podílel na formování moderní algebry a zavedení symbolických zápisů
- používal symboly $+$, $-$ a zlomkovou čáru
- místo závorek dělal čáru nad celým výrazem, odtud společně s označením r (z latinského *radix*) vznikl dnešní zápis odmocnin
- pro násobení používal zápis *in*, pro rovnost *aequatur*
- jako první začal pomocí písmen označovat i známé veličiny (koeficienty v rovnicích); neznáme označoval samohláskami A, E, I, O, U, Y a známé označoval souhláskami $B, C, D, \ldots$

- máme algebraickou rovnici stupně $n = 3$:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

- přeznačíme koeficienty $a := a_3$, $b := a_2$, $c := a_1$ a $d := a_0$ a píšeme

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

- chceme najít obecné řešení

$$x = x(a, b, c, d) = ?$$

Historické okénko

- mezi klasické úlohy starověkého Řecka patří trisekce úhlu nebo zdvojení krychle

→ pomocí pravítka a kružítka rozdělit daný úhel na tři shodné úhly

→ pomocí pravítka a kružítka sestrojit hranu krychle, jejíž objem je dvojnásobkem objemu zadané krychle ($x^3 = 2a^3$)

- obě tyto úlohy vedou na kubické rovnice, tehdy ještě neuměli řešit
- až na přelomu 15. a 16. století n. l. došlo k objevení metod řešení algebraických rovnic třetího (a čtvrtého stupně)

- přibližně na počátku 16. století ovládal metodu řešení kubické rovnice $x^3 + ax = b$ s $a, b > 0$ italský matematik a profesor na boloňské univerzitě **Scipione del Ferro** ($*$1465 – †1526)
- možná ji sám objevil nebo ji nalezl v nějakém starším spisu
- metodu řešení tajil, což ale v té době bylo běžné
- nezávisle na něm metodu řešení formuloval i jiný italský matematik **Niccolò Fontana** ($*$1499 – †1557) řečený **Tartaglia** (koktavý)
- postup též nezveřejnil

Niccolò Fontana Tartaglia

- brzy po vydání jeho práce o balistice byl kontaktován Cardanem
- původně svou metodu Cardanovi prozradit nechtěl
- protože však doufal, že se díky tomu stane dělostřeleckým poradcem španělské armády, pod příslibem nepublikování mu ji prozradil
- Cardano ji i přes slib publikoval

Zdroj: wikipedia.org

Gerolamo Cardano ($*1501 – †1576$)

- byl to italský matematik, filosof a astronom
- stal se jedním z nejvýznamějších představitelů rozvoje přírodních věd v renesanci
- jeho otec byl advokátem, ale velmi vzdělaným v matematice
- v mládí se živil hazardem, v němž se mu dařilo i díky pochopení pravděpodobnosti
- studoval na univerzitách v Pavii a Padově
- v Padově a Bologni působil jako profesor matematiky a později i lékařství

- v roce 1545 vydal své hlavní dílo *Ars Magna* (Velké dílo)
- v něm popisuje řešení algebraických rovnic prvního až čtvrtého stupně, přinesl ucelený přehled
- navzdory slibu prozradil i Tartagliovu metodu
- publikoval i metodu pro kvartické rovnice, kterou objevil jeho žák **Ludovico Ferrari** ($*$1522 – †1565)

Gerolamo Cardano

Zdroj: wikipedia.org

Cardanovy vzorce

- pojmenovány po G. Cardanovi
- dávají obecné řešení kubické rovnice

- vezměme nyní kubickou rovnici ve vynormovaném tvaru $x^3 + kx^2 + lx + m = 0$
- nejprve substitucí $x = t - \frac{k}{3}$ přejdeme ke kubické rovnici bez kvadratického členu $t^3 = pt + q$
- poté položíme $t = u + v$, dostaneme rovnici $u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = p(u + v) + q$
- Cardano přidává další podmínku $3uv = p$, čímž dojde k rovnici $u^3 + v^3 = q$

- problém je převeden na kvadratickou rovnici pro u, a to

$$u^3 + \left(\frac{p}{3u}\right)^3 = q$$

- řešením (a ze symetrie pro u a v) dostáváme

$$u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^2}$$

$$v^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^2}$$

- odtud už přímo plyne vztah pro t:

$$t = u+v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^2}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^2}}$$

- řešení původní rovnice $x = t - \frac{k}{3}$

- znovu zdůrazněme, že v 16. století pracovali matematici výhradně s kladnými čísly
- bylo proto třeba rozlišit rovnice typu $t^3 = pt + q$, $t^3 + pt = q$ a $t^3 + q = pt$
- Cardanův vzorec dává pouze jedno řešení (reálný kořen)
- dalšími dvěma (komplexními) kořeny jsou čísla $\varepsilon u + \varepsilon^2 v$ a $\varepsilon^2 u + \varepsilon v$, kde $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{3}{2}$ (komplexní odmocnina z 1)
- můžeme jako u kvadratických rovnic zavést diskriminant

Diskriminant kubické rovnice

- **diskriminant** zavedeme jako

$$D = \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$$

- opět rozlišíme tři případy:
  - $\star$ $D > 0 \ldots$ 1 reálný a 2 komplexně sdružené kořeny
  - $\star$ $D = 0 \ldots$ 1 trojnásobný kořen nebo 1 jednoduchý a 1 dvojnásobný (reálné)
  - $\star$ $D < 0 \ldots$ 3 reálné kořeny (tzv. casus irreducibilis)
- připomeňme, že parametry p a q jsou z transformované rovnice $t^3 = px + q$, závisejí na a, b, c a d z původní rovnice
- po dosazení a úpravách můžeme zavést $D = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2$

- pro tehdejší matematiky (Cardanovy současníky) byl případ $D < 0$ nepochopitelný, protože ve vzorci se objeví pod druhou odmocninou záporné číslo, přestože kořen je reálný
- to postupně vedlo k uznání záporných čísel, časem i ke zkoumání záporných čísel pod odmocninou a zavedení komplexních čísel
- například rovnice $x^3 - 15x - 4 = 0$ má kořen $x = 4$, přestože při dosazení do Cardanova vzorce máme pod odmocninou záporné číslo:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Viètovy vzorce

- F. Viète ve své práci uvedl vzorce propojující kořeny s koeficienty i pro rovnice vyšších stupňů
- mějme vynormovanou kubickou rovnici ve tvaru:

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

- kořeny této rovnice označíme x_1, x_2 a x_3
- platí

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p$$

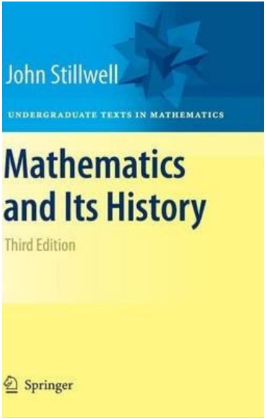
$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = q$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = r$$

Literatura

- Stillwell, John. *Mathematics and Its History.* New York: Springer. 2010

- Seifert, Ladislav. *Kubické a bikvadratické problémy.* Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1951.



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{aligned}
x_1 = &-\frac{b}{3a} \\
&-\frac{1}{3a}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left[2b^3 - 9abc + 27a^2d + \sqrt{\left(2b^3 - 9abc + 27a^2d\right)^2 - 4\left(b^2 - 3ac\right)^3}\right]} \\
&-\frac{1}{3a}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left[2b^3 - 9abc + 27a^2d - \sqrt{\left(2b^3 - 9abc + 27a^2d\right)^2 - 4\left(b^2 - 3ac\right)^3}\right]} \\
x_2 = &-\frac{b}{3a} \\
&+\frac{1 + i\sqrt{3}}{6a}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left[2b^3 - 9abc + 27a^2d + \sqrt{\left(2b^3 - 9abc + 27a^2d\right)^2 - 4\left(b^2 - 3ac\right)^3}\right]} \\
&+\frac{1 - i\sqrt{3}}{6a}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left[2b^3 - 9abc + 27a^2d - \sqrt{\left(2b^3 - 9abc + 27a^2d\right)^2 - 4\left(b^2 - 3ac\right)^3}\right]} \\
x_3 = &-\frac{b}{3a} \\
&+\frac{1 - i\sqrt{3}}{6a}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left[2b^3 - 9abc + 27a^2d + \sqrt{\left(2b^3 - 9abc + 27a^2d\right)^2 - 4\left(b^2 - 3ac\right)^3}\right]} \\
&+\frac{1 + i\sqrt{3}}{6a}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left[2b^3 - 9abc + 27a^2d - \sqrt{\left(2b^3 - 9abc + 27a^2d\right)^2 - 4\left(b^2 - 3ac\right)^3}\right]}
\end{aligned}$$

Děkuji za pozornost!